Lycée pilote de Tunis	**Fonctions primitives**	Terminales Maths & sc
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Déterminer une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

$f(x)=3-\dfrac{4}{x^2}$; $I=]0\,;+\infty[$; $f(x)=sin^3x$ $I=\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I=IR$

$f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I=]1\,;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I=IR$ $f(x)=\cos x\,sin^3x$; $I=\mathbb{R}$

$f(x)=\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^5}$ $I=\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x-3}}$ $I=\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ $f(x)=\dfrac{1}{1+cosx}$ $I=]0,\pi[$

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble sur lequel f est continue puis donner une primitive.

$f(x)=tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+tan^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$; $f(x)=x+2+\sqrt{x+2}$; $f(x)=x\sqrt{2x-1}$

$f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt[4]{(x^2+4x+5)^3}}$; $f(x)=\dfrac{x^2cosx-2x\,sinx}{x^4}$; $f(x)=\dfrac{1}{cos^4x}$

Exercice2

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\dfrac{sinx}{cos^3x}$ et $h(x)=\dfrac{1}{cos^4x}$.

a) Donner la primitive F de f sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ vérifiant $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et que $f'(x)=\dfrac{3}{cos^4x}-\dfrac{2}{cos^2x}$.

c) Déduire la primitive H de h sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ vérifiant $H\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

Exercice 3

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

1. Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive G de g vérifiant $G(0)=0$.
2. Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $H(x)=G(tanx)$. Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$. En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $H(x)=x$. Calculer $G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
3. On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$, $K(x)=G\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+G\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$. Montrer que K est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $K'(x)$.

   En déduire que : $G\left(\dfrac{1}{2}\right)+G\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
4. Montrer que G est impaire.
5. On pose $S(x)=G(x)+G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x\succ 0$, déterminer la dérivée de S.

Déduire que G admet une limite l en $+\infty$ et que $l = 2G(1)$.

6. Construire la courbe de G.

Exercice 4

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1}$. Montrer que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F\left(\dfrac{1 + tanx}{2}\right)$.

   a) Montrer que g est une fonction affine.

   b) Déduire la valeur de $F(1) - F(0)$.

Exercice 5

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que u admet sur $]0, +\infty[$ une seule primitive f qui s'annule en 1.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \succ 0$.
3. Montrer que pour tout $x \succ 0$ et pour tout $y \succ 0$ on a : $f(xy) = f(x) + f(y)$.
4. En déduire que pour tout $x \succ 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ et prouver que pour $x \succ 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\left(x^n\right) = n\,f(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = f\left(2^n\right)$. Calculer la limite de v puis déduire la limite de f en $+\infty$.
6. Montrer que pour $x \geq 1$, $f(x) \leq 2\sqrt{x}$.
7. Etudier les variations de f et donner une allure de (C_f).

Exercice6

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$+ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

   a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

   b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé unité 2 cm.
2. Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$+ qui s'annule en 0 et g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F(tan^2 x)$

   a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

   b) Calculer $F(1)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]-2, 2[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$. On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f et tracer (C).
2. Soit F la primitive de f sur $]-2, 2[$ qui s'annule en 0. Montrer que F est impaire.
3. Soit G la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(2\,sinx)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(x)=2x-sin2x$.

4. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Monter que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$.

2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f et soit (C') sa courbe représentative dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

   a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$.

   b) Calculer $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

   c) Tracer les courbes (C) et (C').

3. Soit F la primitive de f sur $[0,1[$ qui s'annule en 0 et soit G la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, par

   $G(x)=F\left(\sqrt[3]{cos^2x}\right)$

   a) Montrer que G est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer $G'(x)$.

   b) En déduire que pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $G(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}$.

Exercice 9

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)+3}$. On note que $f(0)=0$.

1. a) Déterminer le signe de t^2+t+3, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   b) Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   c) Etudier la continuité et le sens de variation de la fonction f^{-1}.

2. a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que la courbe (C) de f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

Lycée pilote de Tunis	**Fonctions primitives**	Terminales Maths & sc
Mr Ben Regaya. A	**Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

1. $f(x)=3-\frac{4}{x^2}$; $I=]0\,;+\infty[$ $\Rightarrow F(x)=3x+\frac{4}{x}+k$, $k\in\mathbb{R}$;

$f(x)=sin^3x \Leftrightarrow f(x)=sinx\times sin^2x=sinx\left(1-cos^2x\right)=sinx-sinxcos^2x\Rightarrow$

$F(x)=-cosx+\frac{1}{3}cos^3x+k$, $k\in\mathbb{R}$;

$f(x)=\frac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I=IR$ $\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}$ et donc

$F(x)=\frac{3}{2}\times\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)^2}+k=\frac{-3}{4\left(x^2+1\right)^2}+k$ $k\in\mathbb{R}$.

$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow F(x)=2\sqrt{x^2-1}+k,\ k\in\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}=3\times\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\Rightarrow F(x)=6\sqrt{x^2+x+1}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

$f(x)=cosx\times sin^3x\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}sin^4x+k$, $k\in\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^5}=\frac{1}{2}\times\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+4\right)^5}\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{8}\times\frac{1}{\left(x^2+2x+4\right)^4}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

$f(x)=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{2}\times\frac{2x-3+3}{\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2x-3}{\sqrt{2x-3}}+\frac{3}{\sqrt{2x-3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-3}+\frac{3}{\sqrt{2x-3}}\right)$

$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}+\frac{3}{2}\sqrt{2x-3}\right)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

$f(x)=\frac{1}{1+cosx}=\frac{1}{2cos^2\left(\frac{2}{2}\right)}\Rightarrow f(x)=tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

2. $f(x)=tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+tan^4\left(\frac{x}{2}\right)$ f est continue en tout réel x tel que $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$f(x)=tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ et donc $F(x)=\frac{1}{2}tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+k$, $k\in\mathbb{R}$. terminer…

Exercice2

a) $f(x)=\frac{sinx}{cos^3x}$ est restriction à $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ d'une fonction continue en tout réel distinct de $\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ donc f est continue sur cet intervalle et donc elle admet des primitifs sur cet intervalle.

Remarquons que $f(x)$ est de la forme $-\frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^3}$ et donc une primitive de f est de la forme :

$-\dfrac{(-1)}{[u(x)]^2}+k, k$ réel.

On a donc $x \mapsto \dfrac{1}{[cos(x)]^2}+k, k$ réel est une primitive de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

F est la primitive de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ vérifiant $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ donc $\dfrac{1}{\left[cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^2}+k=1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}+k=1 \Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{3}$.

Ainsi $F(x)=\dfrac{1}{[cos(x)]^2}-\dfrac{1}{3}$ pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

b) f est restriction à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ d'une fonction dérivable en tout réel distinct de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc f est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x)=\frac{cos^4x+3sin^2xcos^2x}{cos^6x}=\frac{cos^2x+3sin^2x}{cos^4x}=\frac{cos^2x+3\left(1-cos^2x\right)}{cos^4x}=\frac{3}{cos^4x}-\frac{2}{cos^2x}.$$

c) L'égalité $f'(x)=\dfrac{3}{cos^4x}-\dfrac{2}{cos^2x}$ est équivalente à $\dfrac{3}{cos^4x}=f'(x)+\dfrac{2}{cos^2x}$ ou encore à

$h(x)=\dfrac{1}{3}\left(f'(x)+\dfrac{2}{cos^2x}\right)$ et donc une primitive de h est toute fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(f(x)+2tanx\right)+k, k$ réel.

Celle qui s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ est tel que :

$$\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)+2tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+k=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}+2\right)+k=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(4+2)+k=0 \Leftrightarrow k=-2.$$

Ainsi $H(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{sinx}{cos^3x}+2tanx\right)-2$ pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Exercice 3

1. g est rationnelle avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$ et par suite elle admet des primitifs sur $\mathbb{R}$, une seule s'annule en 0 c'est G.
2. La fonction tangente est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $tan\left\langle\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right\rangle=[0,+\infty[$ et G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant une primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc H est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et

   $H'(x)=\left(1+tan^2x\right)\times\dfrac{1}{1+tan^2x}=1$.

   On a : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad H'(x)=1$ donc $H(x)=x+k, k$ réel.

   Or $H(0)=G(tan0)=G(0)=0$ donc $k=0$ et par suite $H(x)=x$ pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   $H\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=G\left(tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et comme $H\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ alors $G\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{x}{x+2}$ sont rationnelles avec des dénominateurs ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$ donc elles sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et G est dérivables sur $\mathbb{R}$ donc K est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$K'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{(x+1)^2}}+\frac{2}{(x+2)^2}\times\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(x+2)^2}}=\frac{-1}{(x+1)^2+1}+\frac{2}{(x+2)^2+x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2+2x+2}+\frac{2}{2x^2+4x+4}=\frac{-1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x^2+2x+2}=0$$

Ainsi la fonction K est constante sur $[0,+\infty[$ et donc pour tout réel x de $[0,+\infty[$ $K(x)=K(0)=G(1)$.

Mais $G(1)=G\left(tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=H\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. Ainsi pour tout réel x de $[0,+\infty[$ $K(x)=\dfrac{\pi}{4}$.

En particulier $K(1)=G\left(\dfrac{1}{2}\right)+G\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

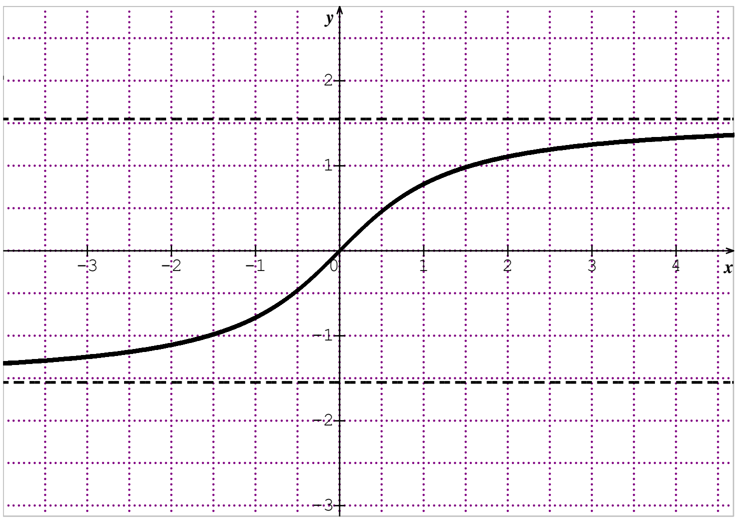
4. Montrons que G est impaire.
Posons pour x réel, $\varphi(x)=G(x)+G(-x)$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x)=g(x)-g(-x)=0$ puisque g est paire.
Donc φ est une fonction constante égale à $\varphi(0)=G(0)+G(0)=0$. Ainsi φ est la fonction nulle et par suite G est impaire.

5. S est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $S'(x)=g(x)-\dfrac{1}{x^2}g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$

S est alors constante sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x\succ 0$, $S(x)=S(1)=2G(1)=\dfrac{\pi}{2}$. Soit encore pour tout réel $x\succ 0$, $G\left(\dfrac{1}{x}\right)+G(x)=\dfrac{\pi}{2}$ ou encore $G(x)=\dfrac{\pi}{2}-G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et G est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0}G(x)=G(0)=0$. Ainsi par composée $\lim\limits_{x\to+\infty}G\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\dfrac{\pi}{2}=2G(1)$.

6. G est impaire donc $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.



Exercice 4

1. On a $2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\succ 0$. Donc *f* est continue sur ℝ (rationnelle avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur ℝ) donc *f* admet des primitives sur ℝ).

2. $g=F\circ u$ avec $u(x)=\frac{1+tanx}{2}$

   u est dérivable en tout réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ en particulier sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et *F* est dérivable sur ℝ alors

   $g=F\circ u$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x)=F'(u(x))\times u'(x)=f(u(x))\times u'(x)$

   $$=\frac{1}{2\left(\frac{1+tanx}{2}\right)^2-2\left(\frac{1+tanx}{2}\right)+1}\times\frac{1}{2}\left(1+tan^2x\right)=\frac{1}{\left(\frac{1+2tanx+tan^2x}{2}\right)-1-tanx+1}\times\frac{1}{2}\left(1+tan^2x\right)$$

   $$=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+tan^2x\right)}\times\frac{1}{2}\left(1+tan^2x\right)=1.$$

   On a donc $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad g'(x)=1\Rightarrow g(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

   $$F(1)-F(0)=F\left(\frac{1+tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)-F\left(\frac{1+tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)-g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5

1. *u* est continue sur $]0,+\infty[$ donc *u* admet des primitifs sur cet intervalle, une seule des primitives s'annule en 1 c'est la fonction *f*.

2. On sait que *f* est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[\ f'(x)=u(x)=\frac{1}{x}\succ 0$. *f* est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$, comme $f(1)=0$ alors *f* est strictement positive sur $]1,+\infty[$ et strictement négatives ailleurs.

3. Soit *y* un réel strictement positif fixé. Posons pour $x\in]0,+\infty[$; $h(x)=f(xy)-f(x)-f(y)$.

   h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x)=y\times f'(xy)-f'(x)-0=y\times\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}=0$.

   D'où *h* est une fonction constante sur $]0,+\infty[$ et comme $h(1)=f(y)-f(1)-f(y)=0$ alors la fonction h est nulle sur $]0,+\infty[$ et par suite $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous réels *x* et *y* strictement positifs.

4. On sait que $f(xy)=f(x)+f(y)$ pour tous réels *x* et *y* strictement positifs.

   Pour *x* réel strictement positif et $y=\frac{1}{x}$, on aura $f\left(x\times\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ et comme $f(1)=0$ alors le résultat en découle.

   Montrons que pour tout réel *x* strictement positif et pour tout entier n ; $f\left(x^n\right)=n\ f(x)$

   Soit $n\in\mathbb{N}$. Etablissons le résultat par récurrence :

   Pour $n=0$, $f\left(x^0\right)=0\times f(x)\Leftrightarrow f(1)=0$ donc vrai pour $n=0$.

Supposons pour $n \in \mathbb{N}$; $f\left(x^n\right) = n\ f(x)$.

$$f\left(x^{n+1}\right) = f\left(x^n \times x\right) = f\left(x^n\right) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Conclusion : pour tout **naturel** n : $f\left(x^n\right) = n\ f(x)$

Soit maintenant un entier n **négatif**. L'entier $n' = -n$ est positif et donc d'après ce qui précède

$$f\left(x^n\right) = f\left(x^{-n'}\right) = f\left(\frac{1}{x^{n'}}\right) = -f\left(x^{n'}\right) = -n'\ f(x) = nf(x).$$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{Z}$; $f\left(x^n\right) = n\ f(x)$.

5. $v_n = f\left(2^n\right) = nf(2)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ en effet $f(2) \succ 0$ car $f(1) = 0$ et f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(2^n\right) = +\infty$ **(1)**

Utilisons le théorème de limite de la fonction composée :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc d'après (1) forcément $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

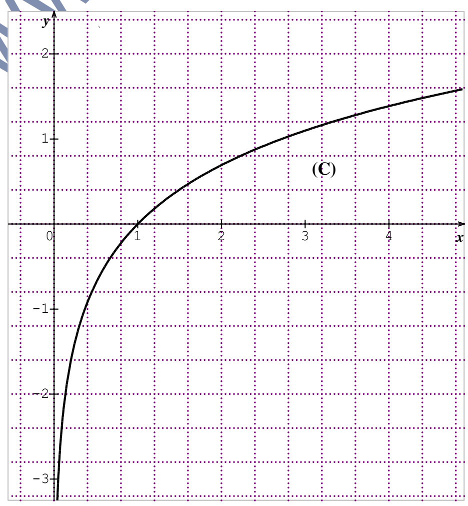
6. Posons pour $x \geq 1$, $g(x) = f(x) - 2\sqrt{x}$. g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x} \leq 0$. Donc g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et donc

$x \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \leq g(1)$ or $g(1) = -2$ donc sur $[1, +\infty[$ $g(x) \leq 0$ et par suite pour $x \geq 1$, $f(x) \leq 2\sqrt{x}$

7. Variation de f et courbe :
   - On a déjà f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ donc la droite x =0 est une asymptote à (C) a droite en 0.
   - $x \geq 1$, $f(x) \leq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et

   donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction l'axe des abscisses.



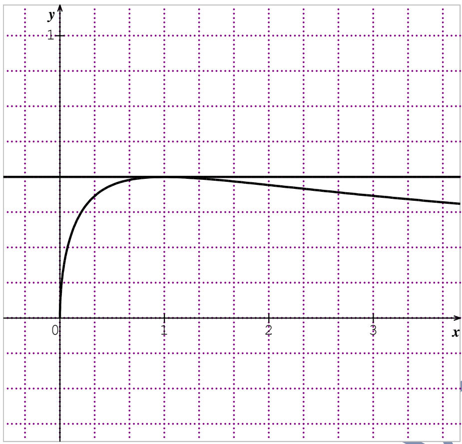
Exercice6

1. a) Pour $x \succ 0$; $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{x(1+x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

b) Pour $x \succ 0$; $\quad f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = 0$$

f est donc strictement croissante de $[0,1]$ sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$



2. F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0, on sait donc que :
   - F est dérivable sur $[0,+\infty[$
   - Pour tout réel x de $[0,+\infty[$
   - $F(0)= 0$

a) $g(x) = F\left(tan^2 x\right) = (F \circ u)(x)$

u est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et a valeurs dans $[0,+\infty[$ car $tan^2 x \geq 0$ et F est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc g est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x) = 2\times tanx\left(1+tan^2 x\right)F'\left(tan^2 x\right)$

$= 2\times tanx\left(1+tan^2 x\right)\dfrac{\sqrt{tan^2 x}}{1+tan^2 x} = |tanx|\times 2tanx = 2tan^2 x$ ($tanx \geq 0$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$)

On a $g'(x) = 2tan^2 x = 2\left(1+tan^2 x\right) - 2$ pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $g(x) = 2tanx - 2x + k;\ k \in \mathbb{R}$.

Or $g(0) = F\left(tan^2 0\right) = F(0) = 0$ donc $k = 0$.

Ainsi $\forall x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; $g(x) = 2tanx - 2x$.

b) $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 2\times\dfrac{\pi}{4} = 2 - \dfrac{\pi}{2}$. Or $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = F\left(tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = F(1)$ .Ainsi $F(1) = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

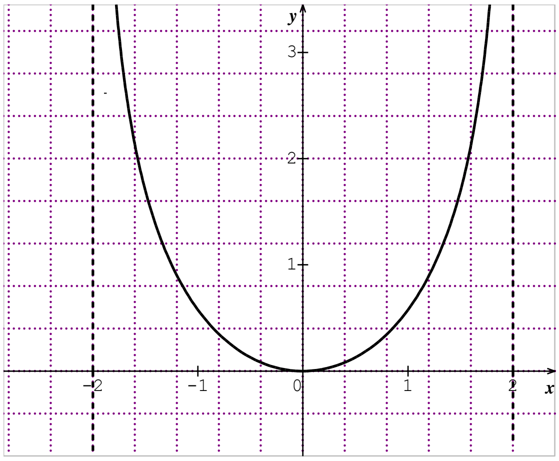
Exercice 7

1. $\forall x \in]-2,2[,\ 4 - x^2 = (2-x)(2+x) \succ 0$ donc f est dérivable sur $]-2,2[$ et $f'(x) = \dfrac{x\left(8-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de x car $8-x^2 \succ 0$ sur $\left]-2,2\right[$.

f est alors strictement décroissante sur $\left]-2,0\right]$ et strictement croissante ailleurs.

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(2)^-} f(x)=-\infty$



2. f est continue sur $\left]-2,2\right[$ donc F existe et elle est dérivable sur cet intervalle.

   Montrons que F est impaire c'est-à-dire si $x\in\left]-2,2\right[$ alors $-x\in\left]-2,2\right[$ (**résultat vrai**) et $F(-x)=-F(x)$.

   Posons $\varphi(x)=F(-x)+F(x)$.

   φ est dérivable sur $\left]-2,2\right[$ et $\varphi'(x)=(-1)F'(-x)+F'(x)=-f(-x)+f(x)=0$ (**remarquer que f est paire**)

   Donc $\varphi'(x)=0\,;\forall x\in\left]-2,2\right[$ donc φ est une fonction constante sur $\left]-2,2\right[$ et comme $\varphi(0)=F(-0)+F(0)=2F(0)=0$ alors $\varphi(x)=0\,;\forall x\in\left]-2,2\right[$ et par suite $F(-x)=-F(x)$ et F est impaire.

3. a) Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x)=F(2sinx)=(F\circ u)(x)$

   On a $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $0\le sinx \prec 1 \Leftrightarrow 0\le 2sinx\prec 2 \Rightarrow u(x)\in\left[0,2\right[$

   u est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $u\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[0,2\right[\subset\left]-2,2\right[$ et comme F est dérivable sur $\left]-2,2\right[$ alors G

   $G=F\circ u$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   $$G'(x)=2cosx\times F'(2sinx)=\frac{4sin^2x}{\sqrt{4-4sin^2x}}\times 2cosx=\frac{4sin^2x}{2\sqrt{1-sin^2x}}\times 2cosx$$

   $$=\frac{4sin^2x}{\sqrt{cos^2x}}\times cosx=\frac{4sin^2x}{|cosx|}\times cosx=4sin^2x\ \left(\text{car } cosx\succ 0\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\ \right).$$

   Ainsi $G'(x)=4sin^2x$ pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   b) On a $G'(x)=4sin^2x=4\left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)=2-2cos(2x)$ et donc

   $G(x)=2x-sin(2x)+k;\ k\in\mathbb{R}$.

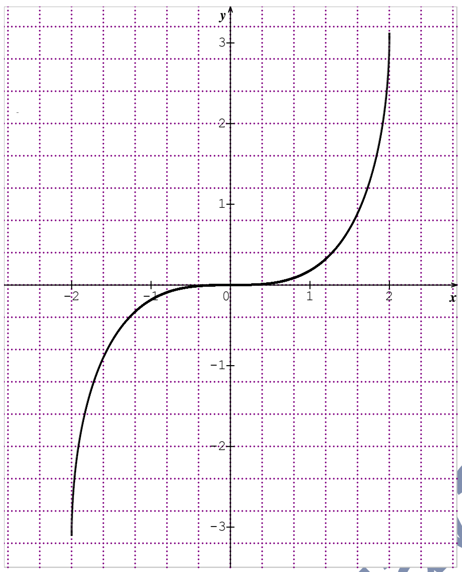
   Or $G(0)=F(2sin(0))=F(0)=0$ donc $k=0$ et par suite $G(x)=2x-sin(2x)$.

   On sait que : $\forall x\in\left]-2,2\right[$, $F'x)=f(x)$ donc F est strictement croissante sur $\left]-2,2\right[$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 2x - \sin(2x) = \pi \text{ donc } \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(2\sin x) = \pi$$

Utilisons **le théorème de limites des fonctions composées**.

$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 2\sin x = 2$ et donc $\lim_{x\to 2^-} F(x) = \pi$ et comme F est impaire alors $\lim_{x\to -2^+} F(x) = -\pi$



Exercice 8

1. a) Pour $x \in \left]0,1\right[$; $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}}{x} = \dfrac{\dfrac{x}{1-x^3}}{x\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}} = \dfrac{1}{\left(1-x^3\right)\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}}$ et

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\left(1-x^3\right)\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}} = +\infty$ donc *f* n'est pas dérivable à droite en 0.

b) *f* est dérivable sur $\left]0,1\right[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1-x^3+3x^3}{\left(1-x^3\right)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}} = \dfrac{1+2x^3}{2\left(1-x^3\right)^2\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}}$. Le signe de

$f'(x)$ est celui de $1+2x^3 \succ 0$ qui est strictement positif sur $\left]0,1\right[$. Ainsi *f* est strictement croissante sur $\left[0,1\right[$ et elle est a valeurs dans $\left[0,+\infty\right[$.

c) *f* étant continue et strictement croissante sur $\left[0,1\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left[0,1\right[$ sur $\left[0,+\infty\right[$

2. a) Dérivabilité de f^{-1} sur $\left[0,+\infty\right[$.

f n'est pas dérivable à droite en 0 donc la tangente à la courbe (C) au point O a pour équation $\begin{cases} x=0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Donc son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$ est tangente à (C') aussi au point O et elle a pour équation $\begin{cases} y=0 \\ x\geq 0 \end{cases}$. Ainsi f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $\left(f^{-1}\right)'(0) = 0$.

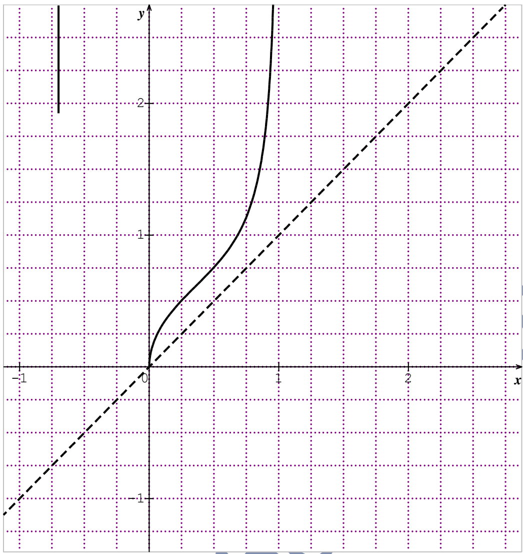
Sur $\left]0,1\right[$ *f* est dérivable et sa fonction dérivée ne s'annule pas donc f^{-1} est dérivable sur $f\left\langle \left]0,1\right[\right\rangle = \left]0,+\infty\right[$

et comme f^{-1} est dérivable à droite en 0 alors elle est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b) $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1-\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}=\frac{1+2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3}{2\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3\right)^2\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{2\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$.



Compléter la courbe (C')

3. a) F la primitive de f sur $[0,1[$ qui s'annule en 0 donc F est dérivable sur $[0,1[$ et $F(0)=0$.

$G=F\circ h$ avec $h(x)=\sqrt[3]{cos^2x}$.

h est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et elle est a valeurs dans $[0,1[$ car pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $cos^2x\in[0,1[$ et comme F est continue sur $[0,1[$ alors $G=F\circ h$ est continue $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour la dérivabilité de G sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction $x\mapsto cos^2x$ est dérivabilité sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et a valeurs dans $]0,1[$ et la fonction racine cubique est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc sur $]0,1[$ et elle est à valeurs dans $]0,1[$ donc h est dérivable sur $]0,1[$ et elle est à valeurs dans $]0,1[$ et comme F est dérivable sur $]0,1[$ alors G est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x)=f\left(\sqrt[3]{cos^2x}\right)\times\frac{-2\times sinx\times cosx}{3\sqrt[3]{cos^4x}}=\frac{-2\times sinx\times cosx}{3\sqrt[3]{cos^4x}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{cos^2x}}{1-\left(\sqrt[3]{cos^2x}\right)^3}}$

$$= \frac{-2\times sinx\times cosx}{3\sqrt[3]{cos^4 x}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{cos^2 x}}{1-cos^2 x}} = \frac{-2\times cosx}{3\sqrt[3]{cos^4 x}}\times\sqrt{\sqrt[3]{cos^2 x}} = \frac{-2\times\sqrt[3]{cos^3 x}}{3\sqrt[3]{cos^4 x}}\times\sqrt[3]{cosx} = -\frac{2}{3}$$. il faut noter qu'on a tenu compte du fait que pour x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $cosx \succ 0$.

b) On a pour x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(x) = -\frac{2}{3}$ donc pour x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $G(x) = -\frac{2}{3}x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\sqrt[3]{cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = F(0) = 0 \text{ donc } -\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi pour tout réel x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $G(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}$.

Exercice 9

1. a) $t^2 + t + 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \succ 0$.

   b) Pour tout réel x on a : $f^2(x) + f(x) + 3 \succ 0$ d'après a).

   f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{f^2(x)+f(x)+3} \succ 0$

   donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

   c) f étant continue sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même pour f^{-1}.

   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même pour f^{-1}.

2. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

   $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = f^2(y) + f(y) + 3$ avec $x = f(y)$, y réel.

   Et donc $\left(f^{-1}\right)'(x) = x^2 + x + 3$.

   b) On a : $f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$ f^{-1} est alors la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto x^2 + x + 3$.

   Or une primitive sur $\mathbb{R}$ de telle fonction est la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + k$, k réel.

   Et donc on voit tout de suite que $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$.

   On a : $\left(f^{-1}\right)'(x) = x^2 + x + 3$ et cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f^{-1} est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\left(f^{-1}\right)''(x) = 2x + 1$.

   La fonction dérivée seconde de f^{-1} s'annule en $-\frac{1}{2}$ et change de signe donc le point A de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{17}{12}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe de f^{-1}.

   $$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} = \frac{-1+3-36}{24} = \frac{-34}{24} = \frac{-17}{12}.$$

   Ainsi compte tenu du fait que les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$, on en déduit que le point $A'\left(-\frac{17}{12}, -\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe de f.