Mme Triki Ikhlas   Série d'exercices (Primitives)   4 Math

Exercice n°1

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$

on suppose que $f(0)=1$ et $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x\in]0,1[$

1°) Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$

2°) a) Mq $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $f(\cos x)=\frac{2}{\pi}x$.

b) En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in[0,1]$

3°) on pose pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $h(x)=f(\cos x)+f(\sin x)$

a) Mq h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$

b) En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $h(x)=1$.

4°) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $\varphi_n(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x)-x^n$, $x\in[0,1]$

a) Mq pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $a_n\in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$ et si $n>p$ alors $\varphi_n(x)>\varphi_p(x)$

c) En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.

Exercice n°2 :

Déterminer une primitive F sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants

1°) $f(x)=x\cos(1+x^2)$; $I=\mathbb{R}$.

2°) $f(x)=\cos x\cdot\sin 2x$ $I=\mathbb{R}$.

3°) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{(2+\cos^2 x)^2}$ $I=\mathbb{R}$.

4°) $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$ $I=]0,+\infty[$

5°) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $I=\mathbb{R}$.

6°) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ $I=]-\infty,0[$

7°) $f(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ $I=]0,+\infty[$

1'°) $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$, $I=]-\pi,\pi[$

2'°) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$ $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

3'°) $f(x)=x\sqrt{1-x}$ $I=]-\infty,1]$

4'°) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$, $I=]1,+\infty[$

Exercice n°3

soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$

1°) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1

2°) Dresser T.V de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

3°) Soit G la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $G(x) = F(\sin x)$ ou F la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0

a) Mq G est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$

b) En déduire que pour tout réel x de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $G(x) = x - \tan\frac{x}{2}$.

4°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°4:

pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$, $x \in [0,1[$

1°) a) Mq f_n admet au moins une primitive sur $[0,1[$ qui s'annule en 0

b) Déterminer la primitive F_n de f_n

c) Déduire une autre expression de $f_n(x)$

2°) soit $\alpha \in [0,\frac{\pi}{4}[$ et $U_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \tan^{k-1}\alpha$

Déduire que U converge vers une limite que l'on précisera

Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

1°) Mq f admet une primitive et une seule F qui s'annule en 1.

2°) Etudier le sens de variation de F et en déduire que :

$\forall x \in]0,1[\ F(x)<0$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ F(x)>0$.

3°) Soit $H(x)=F(2x)$ pour $x>0$.

a) Mq H est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que $F(2x)=F(2)+F(x)$.

c) Mq $F\left(\frac{x}{2}\right)=F(x)-F(2)$.

4°) Determiner, à l'aide de F, la primitive G de la fonction g définie sur $]-\infty,0[$ par $g(x)=\frac{1}{x}$ qui s'annule en (-1)

Exercice n°7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1°) Etudier les variations de $\varphi : x \longmapsto F(x)+F(-x)$. En déduire que F est impaire

2°) a) Mq $F(1)\leq 1$

b) Soit Ψ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\Psi(x)=F(x)+\frac{1}{x}$. Etudier la monotonie de la fonction Ψ. En déduire que F est majorée sur $[1,+\infty[$

c) Mq F admet une limite finie L en $+\infty$

3°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)$

Mq g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g'(x)$. En déduire $L=2F(1)$

4°) on pose $h(x)=\tan x\quad \forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

a) Verifier que $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} F\circ h(x)=L$.

b) Mq $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\quad F\circ h(x)=x$

c) En déduire la valeur de L puis la valeur de $F(1)$

5°) Construire la courbe représentative de F selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$