Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°16 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

Donner les primitives de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$; $I = IR$.

2) $f\ :\ x \mapsto \tan x + \tan^3 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) $f\ :\ x \mapsto x\sqrt{x^2+9}$; $I = IR$.

4) $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $I =]0,+\infty[$.

5) $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x+3}{(x+2)^4}$; $I =]-2,+\infty[$.

6) $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$; $I =]-\infty,0[$.

7) $f\ :\ x \mapsto \cos^3 x$; $I = IR$.

8) $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$; $I =]0,+\infty[$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1) Justifier que f admet une seule primitive F sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

2) Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F(\tan^2 x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $G'(x) = 2\tan^2 x$.

b) En déduire que pour tout réel $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = 2\tan x - 2x$.

c) Donner alors $F(1)$ et $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x^2 - \sqrt{1-x^2}$.

1) Soit F la primitve de f sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $[-1,1]$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.

a) Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1,1]$.

b) En déduire que F est impaire.

2) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $H(x) = x - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

Série n° 16.

Ex 1)

1) Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$

Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est :

On pose $U(x) = x^2+2x+2$.

$U'(x) = 2(x+1)$.

$$f(x) = \frac{U'}{U^2} \cdot \frac{1}{2}$$

donc $F(x) = \dfrac{-1}{x^2+2x+2} \cdot \dfrac{1}{2} + c$

$= \dfrac{-1}{2(x^2+2x+2)} + c$

2) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$

$= \tan x (\tan^2 x + 1)$.

$= U \cdot U'$.

$F(x) = \dfrac{U^2}{2} + c$

$= \dfrac{\tan^2 x}{2} + c$.

3) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+9}$

$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{x^2+9}$

Une primitive de f s'écrit:

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^2+9)\sqrt{x^2+9} + c$.

$= \frac{1}{3} \cdot (x^2+9) \cdot \sqrt{x^2+9} + c$.

4) $F(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + c$.

5) $F(x) = \dfrac{+(x+2)^{-2}}{-2} + \dfrac{(x+2)^{-3}}{-3} + c$.

Ex 2)

1) la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \in [0, +\infty[$.

donc il existe une primitive F de f sur $[0,$ qui s'annule en 0.

2) $G : [0, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}+$

$x \longmapsto F(\tan^2 x)$.

a) ..... (Rédaction).

$G'(x) = (\tan^2 x)' \cdot F'(\tan^2 x)$

$= 2 \cdot \tan^2 +$

b) primitive de $G'(x)$

$G'(x) = 2\tan^2 x$

$G'(x) = 2(1+\tan^2 x) - 2$

$G(x) = 2 \cdot \tan x - 2x + c$.

or $G(0) = F(\tan^2 0) = F(0) = 0$.

d'où $2\tan 0 - 2 \cdot 0 + c = 0$

$c = 0$.

$G(x) = 2\tan x - 2x$.

c) $F(1) = G(\pi/4)$

$= 2 - \frac{\pi}{2}$.

$F\left(\frac{1}{3}\right) = G\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \dfrac{2\sqrt{3} - \pi}{3}$.

Ex 3]

$\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = x^2 - \sqrt{1-x^2}$.

1) Soit F la primitive de f sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0.

G la fonction définie par :

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

a) F est dérivable sur $[-1,1]$ comme étant primitive sur $[-1,1]$.

la fonction $x \mapsto -x$ dérivable sur $[-1,1]$, et si $x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$.

d'où $F(-x)$ dérivable sur $[-1,1]$.

$\Rightarrow$ G dérivable sur $[-1,1]$.

pour $x \in [-1,1]$,

$$G'(x) = f(x) + (-x)' \cdot f(-x)$$
$$= f(x) - f(-x) \quad \text{or } f \text{ paire.}$$
$$= 0.$$

d'où $G(x) = c$ pour $x \in [-1,1]$.

d'où $G(x) = G(0) = F(0) + F(0)$
$= 0$ pour $x \in [-1,1]$.

d'où $\forall x \in [-1,1]$,
$F(x) + F(-x) = 0$
ssi $F(-x) = -F(x)$.
d'où F impaire.

2) La fonction F dérivable sur $[-1,1]$ comme étant primitive de f sur $[\ldots]$

La fonction $x \mapsto \cos x$ dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

" " $x \mapsto \sin x$ " " $[0, \frac{\pi}{2}]$

et pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\begin{cases} \cos x \in [-1,1] \\ \sin x \in [\ldots] \end{cases}$.

donc $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$ dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$H'(x) = -\sin x\, f(\cos x) - \cos x \cdot f(\sin x)$$
$$= -\sin x \cdot (\cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x})$$
$$- \cos x \cdot (\sin^2 x - \sqrt{1-\sin^2 x})$$
$$= -\sin x (\cos^2 x - |\sin x|) - \cos x (\sin^2 x - |$$
$$= -\sin x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x - \cos x \cdot \sin^2 x + \cos$$
$$= -\cos x \cdot \sin x (\cos x + \sin x) + 1.$$
$$= -\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^2 x \cdot \cos x + 1.$$

b) $H(x) = \dfrac{\cos^3 x}{3} - \dfrac{\sin^3 x}{3} + x + c$.

or $H(\frac{\pi}{4}) = F(\frac{\sqrt{2}}{2}) - F(\frac{\sqrt{2}}{2})$
$= 0$.

ssi $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + c = 0$

d'où $c = -\frac{\pi}{4}$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $H(x) = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\sin$