Exercice1 :

1)Toute primitive de $\sin^8(x)$ est une fonction impaire.

2)Toute primitive de $\sin^9(x)$ est une fonction paire.

Exercice 2 Donner les bonnes réponses.
Soit f une fonction définie sur IR et F la primitive de f qui vérifie F (0) = 2.

1) La primitive G de la fonction $x \mapsto f(2x)$ qui vérifie G (0) = 2 est telle que G(x) est égal à :

a) F(2x) + 1 b) $\frac{1}{2}F(2x)$ + 1 c) $\frac{1}{2}F(2x)$

2) La primitive H de la fonction $x \mapsto f(x+2)$ qui vérifie H (0) = 2 est la fonction :

a) $x \mapsto F(x+2)$ b) $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$ c) $x \mapsto F(x+2)+2-F(2)$

3) La primitive J de la fonction $x \mapsto f(x)+2$ qui vérifie J (0) = 2 est la fonction :

a) $x \mapsto F(x)+2$ b) $x \mapsto F(x)+2x$ c) $x \mapsto F(x)$

Exercice 3:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

f (x) = $x(x^2+1)^4$, f (x) = tan x + (tan x)^3 ,

f (x) = $\cos^3 x$; f (x) = (cos x)² (sin x)^3.;

f(x) = $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, f(x) = (1-x)$\sqrt{x}$; f (x) = sin2xcos3x;

f (x) = $\frac{1}{1-\cos x}$; f(x) = $\frac{1}{1+\cos x}$; f(x) = $\frac{1}{\sqrt{-4x+3}}$;

f (x) = $\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$;f(x) = $\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$, f (x) = x² $\sqrt{x-1}$,

f(x) = x cos (x²), f(x)=$\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$, f(x)=$\frac{1}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 4:

Soit h (x) = $\sqrt{4-x^2}$

a/ Montrer que h admet une primitive H sur [-2, 2] vérifiant H (0) = 0

b/ Soit g (x) = H (2cosx), x∈[0, π].

Montrer que g est dérivable sur [0, π] et que g'(x) = - 4 $\sin^2$x.

Calculer g ($\frac{\pi}{2}$) puis déduire g (x).

Exercice 5:

Déterminer les primitives des fonctions

f (x) = x cosx et g (x) = x sinx,

après avoir calculé leurs … dérivées.

Exercice 6:

h étant la primitive définie sur]0, +∞[de la fonction

f (x) = $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

1°) Etudier les variations de h et déduire que h est une bijection.

2°) Déduire le signe de h (x) sur]0, +∞[.

3°) Soit G (x) = h (ax), où a∈IR*+.

Montrer que G est une primitive de f .

Déduire que ∀x >0 et y >0, h (x y) = h(y) + h (x).

h($\frac{1}{x}$) = - h (x) , h ($\frac{x}{y}$) = h (x) - h (y).

Exercice 7:

On considère la fonction f définie sur R par :

f(x)= $\frac{1}{1+x^2}$ et F désigne la primitive de f qui vérifie F(0)=0 .

1) Démontrer que F est une fonction impaire

2)on pose ∀ ϵ] -$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ [h(x)= F(tan(x))

a) justifier que h est dérivable sur] -$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ [

et calculer sa dérivée

b)Conclure que l'on a F(tan(x)) = x

c) en déduire la valeur exacte de F($\frac{1}{\sqrt{3}}$)) et de F(1)

3) on pose G(x) = F(x) + F($\frac{1}{x}$)

a) calculer sa dérivé

b) En déduire que F(x) = $\frac{\pi}{2}$ - F($\frac{1}{x}$)

c) Que vaut F($\sqrt{3}$) ?

d) Déterminer la limite de F(x) l'orque x tend vers +∞

4)Déterminer le sens de variation de F puis dresser son tableau de variation

5)On note T la tangente a C au point d'abscisse 0.

a)Déterminer l'équation réduite de T.

Etudier la position de C par rapport a sa tangente T au point 0.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;+ ∞ [par

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) a) Calculer la limite de f en +∞.

b) Etudier les variations de f

2) Soit F la primitive de f sur [0;+∞[qui s'annule en 0.

Déterminer le sens de variation de F sur [0;+∞[.

3) On définit sur [0;+∞[les fonctions H et K par

$H(x) = F(x) - x$, et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$

a) Etudier sur [0;+∞[les variations de H et K.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$

c) En déduire la limite .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$f(x) = \frac{-2}{(x-1)^2+1}$ et F sa primitive sur $]-\infty, 1]$ qui s'annule en 1.

1) Montrer que F est une bijection.

2) On désigne par G la fonction définie sur $[0, \pi[$ par :

$G(x) = F\left(1 - \tan(\frac{x}{2})\right)$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \pi[$ et calculer G' (x).

b) Déterminer G (x) pour tout $x \in [0, \pi[$

puis calculer F (0). En déduire $\int_0^1 \frac{dx}{2-2x+x^2}$

c) Expliciter $F^{-1}(x)$.

3) Soit H définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$H(x) = F(x) + F\left(\frac{x}{x-1}\right)$

a)Montrer que H est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer H'(x)

b) En déduire que pour tout: $x < 1$ on a :

$F\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - F(x)$

3) Soit u la suite réelle définie sur IN par :

$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{k=2n} F\left(\frac{1}{k}\right)$

a) Montrer que pour tout : $n \in IN^*$ et $k \in \{n, n+1, .., 2n\}$ on a : $F\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{K}\right) \leq F\left(\frac{1}{2n}\right)$

b) En déduire la limite de u_n en $+\infty$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Soit φ la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$\varphi(x) = \frac{1}{\cos x}$

a) Montrer que φ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I qu'on précisera

b) Montrer que φ^{-1} est dérivable sur I et que $\forall x \in I, (\varphi^{-1})'(x) = f(x)$

3) Calculer l'aire de la partie du plan limité par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $y = 0$, $x = \sqrt{2}$ et $x = 2$

Soient $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$ et $S_n = \sum_{k=2}^{n} I_k$

pour tout $n \in$ ⎕ 2 Interpréter graphiquement I_n .

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$