Exercice n°1:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^3}\,dx$

1- Montrer que (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n \le \frac{1}{3n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{3n+1}$.

4- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = (-1)^n U_n$

a- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $V_{k+1} - V_k = \frac{(-1)^{k+1}}{3k+1}$.

b- On pose pour tout entier $n \ge 2$: $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{3k+1}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$ en fonction de U_1.

Exercice n°4:

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$ et $J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$.

1-a- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - I_{n+1} = J_n$.

b- En déduire que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2-a- En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$.

3- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \frac{2^n n!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}$ et en déduire les valeurs de I_2 et J_2.

Exercice n°5:

I/ Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra pour unité graphique 6 cm).

1-a- Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b- Montrer que pour tout $x \in [0,1[$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}$.

2- Dresser le tableau de variations de f.

3- Tracer la courbe (C).

II/On désigne par : G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $G(x) = \int_0^{\sin 2x} f(t)\,dt$.

1-a- Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$: $G'(x) = \frac{2\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$.

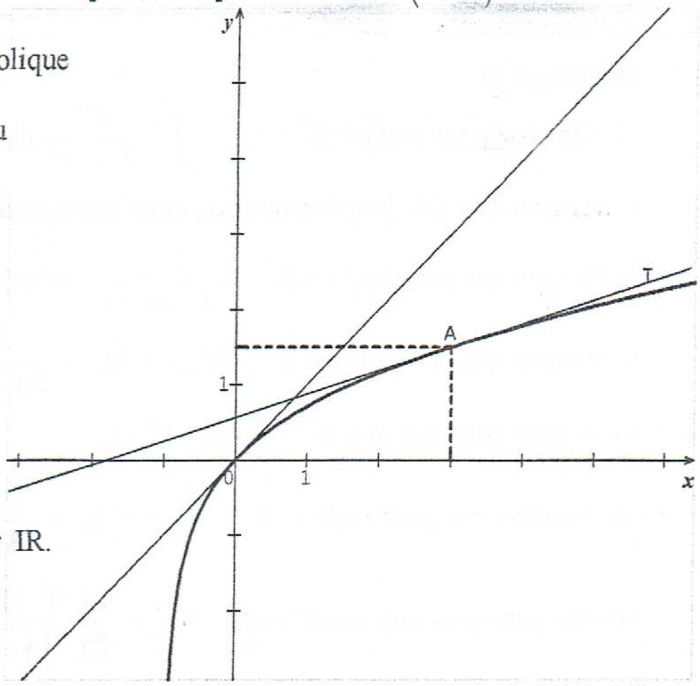
b- En déduire que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$: $G(x) = 2x - \tan x$.

2-a- Calculer F(1) avec F la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0.

b- Calculer alors en cm² l'aire de la région du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,\text{cm}$, (C) admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et une asymptote d'équation $x=-1$.

La droite T est la tangente à la courbe (C) au point A(3; 1,5) et passant par $B(-\frac{1}{5};\frac{1}{2})$.



I /- Par une lecture graphique

1-a- Donner : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

b- Déterminer $f'(3)$ et donner une équation de T.

c- Justifier que f réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur IR.

2- On désigne par F la primitive de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0.

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

a- F est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.

b- La courbe Γ de F admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

c- Pour tout $x\in]-1,+\infty[$: $F(x)\geq 0$.

d- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}=3$.

II / En fait la courbe (C) est celle de la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

1-a- Vérifier que pour tout $x\in]-1,+\infty[$: $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

b- En déduire une primitive de f sur $]-1,+\infty[$.

c- Calculer alors $\int_0^3 f(x)dx$.

2-a- Tracer sur le même repère que (C) la courbe (C ') de f^{-1} fonction réciproque de f.

b- Hachurer sur l'annexe le domaine **D** du plan limité par les courbes (C), (C ') et les droites d'équations : $x=3$ et $y=3$ et calculer en cm² l'aire du domaine **D**.

Exercice n°7 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$ et Cf sa courbe dans un repère orthonormé

1- Montrer que la droite D x=-1 est un axe de symétrie de Cf, etudier f *et* Tracer la courbe de f

3- Soit g la restriction de f sur $]-\infty;-1]$, montrer que g réalise une bijection de $]-\infty;-1]$ sur un intervalle J que l'on précisera et tracer la courbe de Cg^{-1}

5- Soit la fonction F définie sur $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $F(x)=\int_0^{\tan x-1} f(t)dt$

a- Montrer que F est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer F'(x)

b- Déterminer F(x)

c- Calculer l'aire de la partie du plan limite par Cf l'axe des abscisses et les droites x=-2 et x=0