Lycée pilote de Tunis	Calcul intégral 2	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

Soit p un entier naturel non nul et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x^p$. On pose pour n entier $(n\geq 1)$:

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. En interprétant par un calcul d'aires, montrer que :

   a) $S_n\leq\int_0^1 f(x)\,dx\leq s_n$

   b) $s_n-S_n=\frac{1}{n}$.

2. En déduire la limite de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\right)=\frac{1}{p+1}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{tanx}$ .On pose $A=\int_0^1\frac{t}{1+t^4}dt$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$ .Donner alors la valeur de A.

3. Pour n entier naturel on définit les suites u et v par : $u_n(0)=1$ et si $t\neq 0$, $u_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k}$ et

   $$v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4k+2}$$

   a) Montrer que pour tout réel t , $u_n(t)=\frac{1+(-1)^n t^{4n+4}}{1+t^4}$.

   b) Montrer que $v_n-A=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{4n+5}}{1+t^4}dt$. En déduire que v converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\frac{4}{\pi}x-tan\,x$.

   a) Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et qu'il existe un unique réel $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

   b) Etudier le sens de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, l'inégalité $\frac{4}{\pi}x\geq tan\,x$.

2. Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^n x\,dx$.

www.ben-regaya.net
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n \le \frac{\pi}{4(n+1)}$. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

b) Calculer I_2.

c) Pour $n \ge 3$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan^{n-2}x + tan^n x)\, dx$. Déduire que : $I_n = -I_{n-2} + \frac{1}{n-1}$ pour tout $n \ge 3$.

3. Soit (v_k) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$.

a) Déduire que pour tout entier $n \ge 5$, on a : $I_n = I_{n-4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3}$.

b) Montrer que pour tout entier $k \ge 1$, on a alors : $I_{4k+1} = I_1 - \frac{1}{2} v_k$.

c) Montrer que la suite (v_k) converge vers une limite que vous préciser.

Exercice 4

1. Montrer que $k \succ 0$ on a $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$, et si $k \succ 1$ on a $\frac{1}{\sqrt{k}} \le \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2. Soit la suite (u_n) définie pour $n \ge 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$,

a) Montrer que (u_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout naturel $n \ge 2$, $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) - 2\sqrt{n} \le u_n$

c) Déduire que (u_n) est est convergente, on note l sa limite.

3. Demontrer que : $-2 \le l \le -1$.

Exercice 5

Le but de ce problème est d'étudier la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$; $(n \succ 0)$.

A / 1. Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt$.

2. On pose, pour tout $k \succ 0$: $K = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) cos(kt)\, dt$.

A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $K = \frac{1}{k^2}$.

3. On pose, pour tout t de $[0, \pi]$ et $n \succ 0$: $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(kt)$.

Déduire des questions précédentes l'égalité : $u_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t)\, dt$.

www.ben-regaya.net
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

B / Etude de l'intégrale $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\,dt$.

1. a) Vérifier que, pour tout réels a et b: $2\,sinb.cosa = sin(a+b) - sin(a-b)$.

   b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \succ 0$ et $t \in \left]0,\pi\right[$:

   $$D_n(t) = \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

   c) On considère la fonction g définie sur $[0,\pi]$ par $g(0) = -1$ et, si $t \neq 0$, $g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

   Montrer que g est continue en 0.

   d) Montrer que, pour tout $n \succ 0$: $I_n = \int_0^\pi g(t)\,sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$.

2. a) On pose, pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{sinx}{x}$. Montrer que h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $h'(x)$ est du signe de

   $\varphi(x) = x - tanx$.

   b) Etudier le signe de $\varphi(x)$ en étudiant les variations de φ.

   c) En déduire que la fonction h est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   d) Pour $t \in \left]0,\pi\right[$, démontrer l'encadrement : $-\frac{\pi}{2} \leq g(t) \leq -\frac{1}{2}$

3. a) On pose, pour $n \geq 1$: $A_n = \int_0^\pi sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$. Calculer A_n.

   b) On admet que, pour tout $n \geq 1$: $-\frac{\pi}{2}A_n \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}A_n$. En déduire la limite de la suite (I_n).Conclure.

www.ben-regaya.net

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

bac Math

Lycée pilote de Tunis	Calcul intégral 2	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. a) s_n est la somme des aires des rectangles situés au dessus de la courbe de *f*.

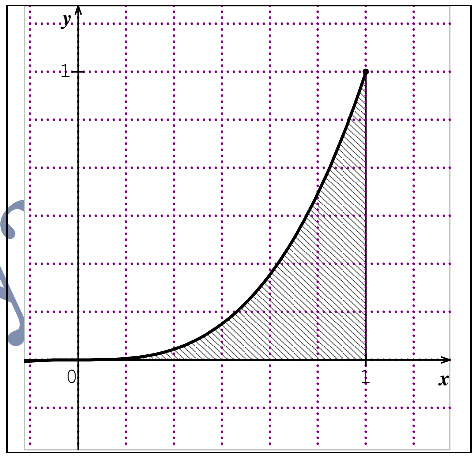
   S_n est la somme des aires des rectangles situés en-dessous de la courbe de *f*. La double inégalité en découle.

   b) $s_n - S_n = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\big(f(1) - f(0)\big) = \dfrac{1}{n}$.

1. On a $\int_0^1 f(x)\,dx \le s_n$ et $s_n - S_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow s_n = S_n + \dfrac{1}{n}$, or

   $S_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow S_n + \dfrac{1}{n} \le \int_0^1 f(x)\,dx + \dfrac{1}{n}$ et donc

   $s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx + \dfrac{1}{n}$. Finalement $\int_0^1 f(x)\,dx \le s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx + \dfrac{1}{n}$.



   Mais $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\dfrac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{p+1}$ donc $\dfrac{1}{p+1} \le s_n \le \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{n}$.

   Par comparaison et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p+1}$ alors

   $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{p+1}$.

   $s_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\dfrac{p}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1^p}{n^p} + \dfrac{2^p}{n^p} + \dots + \dfrac{n^p}{n^p}\right) = \left(\dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}\right)$ et par suite

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}\right) = \dfrac{1}{p+1}$.

Exercice2

1. La fonction tangente étant dérivable et strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors *f* est dérivable sur cet intervalle et

   $f'(x) = \dfrac{1 + tan^2 x}{2\sqrt{tanx}} \succ 0$.

   Pour la dérivabilité de *f* à droite en 0 :

   $x \succ 0;\quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{tanx}}{x} = \dfrac{tanx}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{tanx}}$ et puisque $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{tanx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{tanx}} = +\infty$ alors *f* n'est pas dérivable à droite en 0.

   f étant continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[0, +\infty[$.

   g la fonction réciproque de *f*, existe, définie, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2. **Dérivabilité de *g* à droite en 0** :

   $y \succ 0;\quad \lim\limits_{y\to0^+} \dfrac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x - 0}{f(x) - f(0)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}} = 0$. On a bien sur posé $x = g(y)$ et

www.ben-regaya

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

quand y tend vers 0 par valeurs supérieures x tend aussi vers 0 par valeurs supérieures (puisque g est continue et strictement croissante). La fonction g est alors dérivable à droite en 0.

Dérivabilité de g sur $]0,+\infty[$:

f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction dérivée f' ne s'annule pas sur cet intervalle alors la fonction g est dérivable sur $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$.

Conclusion la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$.

Pour tout réel x de $]0,+\infty[$ $g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{2\sqrt{tany}}{1+tan^2 y}$ avec $y=g(x)$ et $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Or $y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)=\sqrt{tany}\Leftrightarrow x^2=tany$ et donc $g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$.

Remarquons que le dernier résultat reste vrai pour $x = 0$. On peut déduire donc que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t}{1+t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 g'(t)\,dt=\frac{1}{2}[g(1)-g(0)]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-0\right]=\frac{\pi}{8}.$$

3. a) Pour $t\neq 0$, $u_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k}=\sum_{k=0}^{n}\left(-t^4\right)^k$ avec $-t^4\neq 1$ et donc $u_n(t)=\frac{1-\left(-t^4\right)^{n+1}}{1+t^4}=\frac{1-(-1)^{n+1}t^{4n+4}}{1+t^4}$ $=\frac{1+(-1)^n t^{4n+4}}{1+t^4}$ car $(-1)^{n+1}=-(-1)^n$.

   Le dernier résultat reste vrai pour $t=0$, donc pour tout réel t, $u_n(t)=\frac{1+(-1)^n t^{4n+4}}{1+t^4}$.

   b) Remarquons que pour n entier naturel

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{4k+1}dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k+1}dt=\int_0^1 t\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k}dt=\int_0^1 t\sum_{k=0}^{n}\left(-t^4\right)^k dt$$

$$=\int_0^1 t\,\frac{1-\left(-t^4\right)^{n+1}}{1+t^4}dt=\int_0^1\frac{t+(-1)^n\left(t^{4n+5}\right)}{1+t^4}dt\Rightarrow v_n=\int_0^1\frac{t}{1+t^4}dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{4n+5}}{1+t^4}dt$$ et donc

$$v_n=A+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{4n+5}}{1+t^4}dt.$$

$|v_n-A|=\int_0^1\frac{t^{4n+5}}{1+t^4}dt\le\int_0^1 t^{4n+5}\,dt$ or $\int_0^1 t^{4n+5}\,dt=\left[\frac{t^{4n+6}}{4n+6}\right]_0^1=\frac{1}{4n+6}$. Donc $|v_n-A|\le\frac{1}{4n+6}$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n+6}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}v_n=A=\frac{\pi}{8}$.

Exercice3

1. a) f est restriction à $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ d'une fonction dérivable en tout réel distinct de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ donc f est dérivable sur cet intervalle.

www.ben-regaya.net
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Existence de α :

$f(0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe au moins $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(\alpha)=0$

Unicité de α :

On a $f'(x)=\frac{4}{\pi}-1-tan^2 x$ et donc $f''(x)=-2tan\,x\left(1+tan^2 x\right)\leq 0$. Ainsi f' est strictement décroissante et α est unique.

b) f' est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et $f'(\alpha)=0$ donc $f'(x)\geq 0$ sur $[0,\alpha]$ et par suite f est strictement croissante sur cet intervalle et donc f est strictement décroissante ailleurs.

f est strictement croissante sur $[0,\alpha]$ et $f(0)=0$ alors $\forall x\in[0,\alpha]$ $f(x)\geq 0$

f est strictement décroissante sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{4}\right]$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ alors $\forall x\in\left[\alpha,\frac{\pi}{4}\right]$ $f(x)\geq 0$.

Conclusion : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $f(x)\geq 0$ et par suite $\frac{4}{\pi}x\geq tan\,x$.

2. a) On a d'après 1.b) pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{4}{\pi}x\geq tan\,x\geq 0$ et donc vu que la fonction $x\mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $\left(\frac{4}{\pi}\right)^n x^n\geq tan^n x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

Les deux dernières fonctions étant continues sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc d'après la positivité de l'intégrale , on obtient

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n dx\geq\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^n x\,dx \Leftrightarrow \left(\frac{4}{\pi}\right)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\geq I_n \Leftrightarrow \left(\frac{4}{\pi}\right)^n\frac{\pi^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}\geq I_n\; I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}.$$

On a : $0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4(n+1)}=0$ donc par comparaison la suite (I_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

b) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1+tan^2x-1\,dx=\left[tanx-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

c) Pour $n\geq 3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tan^{n-2}x+tan^n x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^{n-2}x\,(1+tan^2x)\,dx=\left[\frac{tan^{n-1}x}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}$. Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tan^{n-2}x+tan^n x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^{n-2}x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^n x\,dx=I_{n-2}+I_n \text{ et donc } I_n=-I_{n-2}+\frac{1}{n-1}\;\forall n\geq 3.$$

3. a) On a $n\geq 5\Leftrightarrow n-4\geq 1$ $\quad I_n=-I_{n-2}+\frac{1}{n-1}=-\left(-I_{n-4}+\frac{1}{n-3}\right)+\frac{1}{n-1}\Leftrightarrow I_n=I_{n-4}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-3}$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier $k\geq 1$, on a : $I_{4k+1}=I_1-\frac{1}{2}v_k$.

Vérifions pour $k=1$: $I_5=I_1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=I_1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ et $v_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ donc $I_5=I_1-\frac{1}{2}v_1$ vrai pour $k=1$.

Supposons pour $k\geq 1$, $I_{4k+1}=I_1-\frac{1}{2}v_k$

$$I_{4k+5}=I_{4k+1}+\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{4k+2}=I_1-\frac{1}{2}v_k+\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{4k+2}=I_1-\frac{1}{2}\left(v_k+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

www.ben-regaya.net

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

bac Math

$= I_1 - \frac{1}{2}v_{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier $k \geq 1$, on a : $I_{4k+1} = I_1 - \frac{1}{2}v_k$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} I_{4k+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} v_k = 2I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$. (*Intégrale qu'on sait calculer plus tard*).

Exercice4

1. Soit $k \geq 1$ si x appartient à l'intervalle $[k, k+1]$, on a $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$, et donc $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   Soit $k \geq 2$ si x appartient à l'intervalle $[k-1, k]$, on a $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$, et donc $\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}} dx = \frac{1}{\sqrt{k}}$

2. a) $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$

   $= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$.

   comme la différence est négative ,il résulte que la suite (u_n) est décroissante.

   b) En sommant des inégalités obtenues dans 1. , on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ soit d'après la relation de

   Chasles pour le calcul intégrale $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et donc

   $\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) - 2\sqrt{n} \leq u_n$.

   Mais $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) - 2\sqrt{n} = -2 + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \geq -2$. Donc la suite (u_n) est minorée par -2.

   c) la suite (u_n) est minorée par -2 comme elle est décroissante elle converge vers une limite l , et $l \geq -2$.

3. En sommant des inégalités obtenues dans 1. , on obtient $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \sum\limits_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

   soit $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^n = 1 + 2\left(\sqrt{n}-1\right)$ et donc $u_n \leq -1$.

   on conclut que $-2 \leq l \leq -1$.

Exercice 5

A 1. $J = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$.

2. $K = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) \, dt$.

www.ben-regaya.net

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM

bac Math

On pose $\begin{cases} u(t)=\dfrac{t^2}{2\pi}-t & \Rightarrow u'(t)=\dfrac{t}{\pi}-1 \\ v'(t)=cos(kt) & \Rightarrow v(t)=\dfrac{1}{k}sin(kt) \end{cases}$. Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, d'où par le théorème d'intégration par parties on a :

$K=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)cos(kt)\,dt=\left[\dfrac{1}{k}sin(kt)\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\right]_0^{\pi}-\dfrac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)sin(kt)dt$ en tenant compte que $sin(k\pi)=0$

Donc $K=-\dfrac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)sin(kt)dt$

Intégrons par parties $\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)sin(kt)dt$

On pose : $\begin{cases} u(t)=\dfrac{t}{\pi}-1 \\ v'(t)=sin(kt) \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t)=\dfrac{1}{\pi} \\ v(t)=-\dfrac{1}{k}cos(kt) \end{cases}$. Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, d'où par le théorème d'intégration par parties on a :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)sin(kt)dt=\left[-\frac{1}{k}cos(kt)\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}cos(kt)dt$$

$$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}cos(kt)dt=-\frac{1}{k}+\frac{1}{\pi k}\left[\frac{1}{k}sin(kt)\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{k}$$

Ainsi $K=-\dfrac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)sin(kt)dt=-\dfrac{1}{k}\times\left(-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{k^2}$

3. Pour $n\succ 0$. $u_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)cos(kt)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}cos(kt)\,dt$

(d'après la linéarité de l'intégrale)

$=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(-\dfrac{1}{2}+D_n(t)\right)dt=-\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)dt+\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)dt=$

$\dfrac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)dt$.

D'où $u_n=\dfrac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\,dt$.

B 1. a) Vérifier que, pour tout réels *a* et *b*: $2\,sinb.cosa=sin(a+b)-sin(a-b)$.

$sin(a+b)=sina.cosb+sinb.cosa$ et $sin(a-b)=sina.cosb-sinb.cosa$ et par différence, on obtient :

$sin(a+b)-sin(a-b)=2\,sinb.cosa$ c'est le résultat.

b) pour $n=1$, $D_1(t)=\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{1}cos(kt)=\dfrac{1}{2}+cos(t)$.

www.ben-regaya.net
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

et $\dfrac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos t+\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}\cos t+\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{1+\cos t}{2}=\dfrac{1}{2}+\cos t$ donc vrai pour $n=1$.

Supposons pour $n\geq 1$, $D_n(t)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

$$D_{n+1}(t)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}+\cos\left((n+1)t\right)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left((n+1)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)+\sin\left(\frac{t}{2}+(n+1)t\right)-\sin\left((n+1)t-\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$ d'après B 1. a)

$$=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)+\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)t\right)-\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$ c'est le résultat.

Conclusion : pour tout $n\succ 0$ et $t\in\left]0,\pi\right[$: $D_n(t)=\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

c) Pour $t\neq 0$, $g(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\dfrac{\frac{t}{\pi}-2}{\dfrac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}}$

On a : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{2}=0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t)}{t}=1\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=1$ (Limite d'une fonction composée)

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\pi}-2=-2$ donc par quotient $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=-1=g(0)$. Donc g est continue en 0.

d) Montrons que pour $n\succ 0$, $I_n=\int_0^{\pi}g(t)\,\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\ dt$

Pour $t\neq 0$, $I_n=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt=\int_0^{\pi}g(t)\,\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)\ dt$.

Vérifier que pour $t=0$, $\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)=g(t)\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)$

www.ben-regaya.net

2. a) h est restriction a $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ donc h est dérivable et

pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; $h'(x)=\frac{xcosx-sinx}{x^2}=\frac{cosx\,(x-tanx)}{x^2}=\frac{cosx\times\varphi(x)}{x^2}$. Or pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $cosx$ est

strictement positif, donc $h'(x)$ est du signe de $\varphi(x)=x-tanx$.

b) $\varphi'(x)=-tan^2x\prec 0$ donc φ est strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]-\infty,0[$ donc φ est

strictement négative.

c) Résultat immédiat.

d) d'après c), h est décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $h\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\frac{2}{\pi},1\right[\Rightarrow x\geq sinx\geq\frac{2}{\pi}x$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $t\in]0,\pi[$, $x=\frac{t}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on aura $0\prec\frac{2t}{\pi}\leq 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\leq t$, donc $\frac{1}{t}\leq\frac{1}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}\leq\frac{\pi}{2t}$.

Comme de plus $\frac{t^2}{2\pi}-t=\frac{t^2-2\pi t}{2\pi}=\frac{t\left(t-2\pi\right)}{2\pi}\leq 0$ sur $]0,\pi[$, alors $\frac{\pi}{2t}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\leq\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}\leq\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{t}$.

On en tire : $-\frac{\pi}{2}+\frac{t}{4}\leq g(t)\leq\frac{t}{2\pi}-1$.

$\frac{t}{2\pi}-1+\frac{1}{2}=\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\left(t-\pi\right)\prec 0\Rightarrow\frac{t}{2\pi}-1\leq-\frac{1}{2}$

Conclure alors que $-\frac{\pi}{2}\leq g(t)\leq-\frac{1}{2}$.

3. a) $A_n=\int_0^{\pi}sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt=\left[-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ en effet

$cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-sin\left(n\pi\right)=0$

b) $\left(I_n\right)$ converge vers 0.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi^2}{6}$.

www.ben-regaya.net
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math