Lycée pilote de Tunis	Calcul intégral 3	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$. On note M le maximum de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$. Montrer que

$\left|\int_0^1 \left(f(x)+x\,f(1-x)\right)dx\right| \le \frac{3}{2}M$.

Exercice 2*

Soient a et b deux réels tels que $a \prec b$, et f une fonction continue sur $[a,b]$ telle qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) \succ 0$, et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $x_2 \in [a,b]$ tel que $f(x_2) \prec 0$.

Exercice 3 *

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction φ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi(t) = t(1-t)$.

   b) En déduire que : pour tout réel $t \in [0,1]$, $0 \le t(1-t) \le \frac{1}{4}$.

2. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2-2t+1}$ et la fonction G définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F\left(\frac{1-\tan x}{2}\right)$.

   a) Vérifier que La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

   b) Vérifier que $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$ et calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   c) Déterminer $G'(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et déduire que : pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$.

   d) Démontrer que $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \frac{\pi}{2}$.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour n entier naturel non nul $v_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$.

   a) Calculer v_1.

   b) Démonter que : pour tout entier naturel n, $0 \le v_n \le \frac{1}{4^n}$. En déduire la convergence de la suite (v_n) vers un réel que l'on calculera.

4. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k\, v_k$.

   a) Démonter que pour tout réel $t \in [0,1]$ et tout entier naturel non nul n,

   $$2t(1-t)+2^2t^2(1-t)^2+\ldots++2^nt^n(1-t)^n = \frac{1}{2t^2-2t+1} - 1 - \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}.$$

   b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $\left|u_n + 1 - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{\pi}{2^{n+2}}$.

   Démonter que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 **

On pose $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

1. Soit F la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ par :

$F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ et G la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par : $G(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}dt$.

a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $G(x)=F(\pi)-F\left(\pi(1-x)\right)$.

b) En déduire que $J=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}dt$

2. Soit u la suite définie pour tout naturel n par :

$u_0=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin(\pi t)\,dt$ et pou n entier non nul $u_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^n\sin(\pi t)\,dt$.

a) Montrer que $J=u_0+u_1+...+u_{n-1}+R_n$ avec $R_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}dt$.

b) Montrer que pour tout t élément de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}\le 2t^n$.

En déduire que pour tout naturel n, $R_n\le\frac{1}{2^n(n+1)}$.

c) Montrer que $J=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+...+u_{n-1})$.

3. Calculer u_0 et u_1.

4. Montrer que pour tout naturel $n\ge 2$, $u_n=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)u_{n-2}\right)$.

5. En utilisant les résultats précédents, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} prés.

Exercice 5 * encore !!**

Soit la suite $u_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin k}{k}$.

1. On désigne par f une fonction **dérivable et de dérivée continue** sur l'intervalle $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt=\frac{1}{\lambda}f(b)\sin(\lambda b)-\frac{1}{\lambda}f(a)\sin(\lambda a)-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$ et en déduire que

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt=0$.

2. a) On rappelle que : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

Exprimer, pour tout réel t, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

b) En déduire que :

$\forall\, t\in[0,1],\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)=\frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\cos\frac{t}{2}\right)$.

c) Montrer alors que : $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}dt-\frac{1}{2}$.

3. Utiliser la première question pour conclure que la suite (u_n) converge vers $-\frac{1}{2}$.

Lycée pilote de Tunis	Calcul intégral 3	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1

D'abord, d'une part, f est continue sur $[0,1]$, d'où l'existence de M, et, d'autre part, l'application $x \mapsto f(x)+xf(1-x)$ est continue sur $[0,1]$,d'où l'existence de l'intégrale envisagée.

On a : $\left|\int_0^1 (f(x)+xf(1-x))dx\right| \le \int_0^1 |(f(x)+xf(1-x))|dx \le \int_0^1 (|f(x)|+x|f(1-x)|)dx$

$\le \int_0^1 (M+xM)dx = M\int_0^1 (1+x)dx = M\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}M$.

Exercice 2

Raisonnons par l'absurde : supposons : $\forall x \in [a,b], f(x) \ge 0$. Puisque $\int_a^b f(x)dx = 0$ et que f est continue et positive ou nulle sur $[a,b]$, on a alors $f = 0$, en contradiction avec l'hypothèse d'existence de $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) \succ 0$.

On conclut qu'il existe $x_2 \in [a,b]$ tel que $f(x_2) \prec 0$.

Exercice 3

1. a) φ polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = 1-2t$ $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow 1-2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

   φ est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante ailleurs.

   b) φ admet un maximum absolue en $\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$ et elle est positive donc pour tout réel $t \in [0,1]$,

   $0 \le t(1-t) \le \frac{1}{4}$.

2. a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{2t^2-2t+1}$ est rationnelle avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ $(\Delta = 4-8 \prec 0)$ donc continue sur $\mathbb{R}$ et par suit la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f).

   et $F'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

   b) $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{1-tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right) = F\left(\frac{1-(-1)}{2}\right) = F(1)$

   $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{1-tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right) = F\left(\frac{1-(1)}{2}\right) = F(0) = 0$.

   c) La fonction $x \mapsto \frac{1-tanx}{2}$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc G est dérivable sur

$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $G'(x)=\left(\frac{-1-tan^2x}{2}\right)F'\left(\frac{1-tanx}{2}\right)=-\left(\frac{1+tan^2x}{2}\right)\times\frac{1}{2\left(\frac{1-tanx}{2}\right)^2-2\left(\frac{1-tanx}{2}\right)+1}$

$=-\left(\frac{1+tan^2x}{2}\right)\times\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+tan^2x-2tanx\right)+tanx}=-\left(\frac{1+tan^2x}{2}\right)\times\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+tan^2x\right)}=-1.$

Ainsi pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $G(x)=-x+k,\ k\in\mathbb{R}$.

$G\left(-\frac{\pi}{4}\right)=F(1)$ et $G\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+k$ donc $k=-\frac{\pi}{4}+F(1)$ et donc pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$G(x)=-x+F(1)-\frac{\pi}{4}$.

d) $\int_0^1\frac{dt}{2t^2-2t+1}=\int_0^{\frac{1-tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}\frac{dt}{2t^2-2t+1}=G\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+F(1)-\frac{\pi}{4}=F(1)$.

Or $G\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}+F(1)-\frac{\pi}{4}=0\Leftrightarrow F(1)=\frac{\pi}{2}$. Le résultat en découle.

3. a) $v_1=\int_0^1 t\left(1-t\right)dt=\int_0^1 t-t^2dt=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

b) On a pour tout réel $t\in[0,1]$, $0\le t(1-t)\le\frac{1}{4}$ et donc $0\le t^n\left(1-t\right)^n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ par croissance de la fonction $x\mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.

La continuité des trois fonctions sur $\mathbb{R}$ et la positivité de l'intégrale permettent d'écrire :

$0\le\int_0^1 t^n\left(1-t\right)^n dt\le\int_0^1\left(\frac{1}{4}\right)^n dt\Leftrightarrow 0\le v_n\le\frac{1}{4^n}$.

$\frac{1}{4}\in]-1,1[\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ et donc par comparaison la suite $\left(v_n\right)$ et sa limite est nulle.

4. a) Soit $s_n=2t\left(1-t\right)+2^2t^2\left(1-t\right)^2+...++2^nt^n\left(1-t\right)^n$. s_n est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $2t\left(1-t\right)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ donc différente de 1.

Donc $s_n=2t\left(1-t\right)\times\frac{1-\left(2t\left(1-t\right)\right)^n}{1-2t\left(1-t\right)}=\frac{2t\left(1-t\right)-\left(2t\left(1-t\right)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}=\frac{-2t^2+2t-1+1-\left(2t\left(1-t\right)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}$

$=-1+\frac{1}{2t^2-2t+1}-\frac{2^{n+1}t^{n+1}\left(1-t\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}$ ce qu'il faut démontrer.

b) $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k\ v_k=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k\int_0^1 t^k\left(1-t\right)^k dt=\int_0^1\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2^kt^k\left(1-t\right)^k\right)dt$. D'après la linéarité de l'intégrale.

$=\int_0^1\left(\frac{1}{2t^2-2t+1}-1-\frac{2^{n+1}t^{n+1}\left(1-t\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right)dt=-1+\int_0^1\left(\frac{1}{2t^2-2t+1}\right)dt+\int_0^1\left(\frac{2^{n+1}t^{n+1}\left(1-t\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right)dt$

$=-1+\frac{\pi}{2}+\int_0^1\left(\frac{2^{n+1}t^{n+1}\left(1-t\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right)dt$

Soit maintenant l'intégrale: $\int_0^1 \left(\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right)dt$

On sait déjà que pour tout réel $t \in [0,1]$, $0 \le t(1-t) \le \frac{1}{4}$ et donc $0 \le 2t(1-t) \le \frac{1}{2}$ et par suite

$0 \le 2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme $2t^2-2t+1 \succ 0$ sur $\mathbb{R}$ alors

$0 \le \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{1}{2t^2-2t+1}$ la continuité des fonctions sur $\mathbb{R}$ et la positivité de l'intégrale

permettent d'écrire $0 \le \int_0^1 \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt$ ou encore

$0 \le \int_0^1 \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{\pi}{2}$ finalement $0 \le \int_0^1 \frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt \le \frac{\pi}{2^{n+2}}$.

$u_n + 1 - \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \left(\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right)dt \Rightarrow \left|u_n + 1 - \frac{\pi}{2}\right| = \int_0^1 \left(\frac{2^{n+1}t^{n+1}(1-t)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\right)dt \le \frac{\pi}{2^{n+2}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$ donc la suite (u_n) converge et sa limite est $\frac{\pi}{2}-1$.

Exercice 4

1. a) Pour x appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{\pi}{2} \le \pi(1-x) \le \pi$

Posons pour x appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $\varphi(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$.

φ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\varphi'(x) = \pi F'(\pi(1-x)) = \pi \frac{sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} = \frac{sin(\pi x)}{(1-x)}$

Et comme $\varphi(0) = F(\pi) - F(\pi) = 0$ alors φ est la primitive sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ de la fonction $x \mapsto \frac{sin(\pi x)}{(1-x)}$

qui s'annule en 0 et par suite $\varphi(x) = \int_0^x \frac{sin(\pi t)}{1-t}dt$. On voit donc que $\varphi(x) = G(x)$ et donc pour tout x

appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a :

$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$.

b) On a : pour tout x appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x))$.

Pour $x = \frac{1}{2}$; $G\left(\frac{1}{2}\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F(\pi) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sint}{t}dx = J$. Or $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin(\pi t)}{1-t}dt$.

Par suite $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin(\pi t)}{1-t}dt$.

2. On a $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} t^k \sin(\pi t)\,dt$ et d'après la linéarité de l'intégrale

$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sin(\pi t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t) \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,dt$ or la somme $\sum_{k=0}^{n-1} t^k$ est géométrique de raison $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

donc différente de 1 et par suite $\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$ et par conséquent $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t) \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} - \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\,dt = J - R_n$.

Ainsi $J = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + R_n$ avec $R_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\,dt$

b) Montrons que pour tout t élément de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \le 2t^n$.

$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \le \sin(\pi t) \le 1$ **(1)**

et aussi $-\frac{1}{2} \le -t \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le 1-t \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{1-t} \le 2$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** par produit on obtient $\frac{\sin(\pi t)}{1-t} \le 2$ et comme $t^n \ge 0, \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on déduit que

$\frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \le 2t^n$.

Déduction : On a $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \le 2t^n$ et les deux fonctions sont continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc la positivité de l'intégrale permet d'écrire :

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\,dt \le \int_0^{\frac{1}{2}} 2t^n\,dt \Leftrightarrow R_n \le 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n(n+1)}$.

Ainsi $0 \le R_n \le \frac{1}{2^n(n+1)}$. Remarquons que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} = 0$.

On a $J - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = R_n \Rightarrow \left| J - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right| = R_n$ et comme $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ alors

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = J$.

3. $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$

Utilisons une intégration par parties pour calculer $u_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(\pi t)\,dt$

On pose:

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) \end{cases}$$

Les quatre fonctions étant continues sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$u_1 = \left[-\frac{t}{\pi}cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} cos(\pi t)dt$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}sin(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^2}.$$

4. Montrer que pour tout naturel $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right)$.

Intégrons deux fois par parties. $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n sin(\pi t)dt$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^n \\ v'(t) = sin(\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = n\,t^{n-1} \\ v(t) = -\frac{1}{\pi}cos(\pi t) \end{cases}$$

Les quatre fonctions étant continues sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$u_n = \left[-\frac{t^n}{\pi}cos(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}cos(\pi t)dt$$

$$u_n = \frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}cos(\pi t)dt$$

Intégrons par parties l'intégrale $w_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1}cos(\pi t)dt$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{n-1} \\ v'(t) = cos(\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = (n-1)\,t^{n-2} \\ v(t) = \frac{1}{\pi}sin(\pi t) \end{cases}$$

Les quatre fonctions étant continues sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

$$w_n = \left[\frac{t^{n-1}}{\pi}sin(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{(n-1)}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-2}sin(\pi t)dt = \frac{1}{2^{n-1}\pi} - \frac{(n-1)}{\pi}u_{n-2}.$$

Ainsi $u_n = \frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{2^{n-1}\pi} - \frac{(n-1)}{\pi}u_{n-2}\right)$ soit encore $u_n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2}\right)$

On a déjà établit que $J - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = R_n$ et que

$0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^n(n+1)}$, on en déduit donc que $\left|J - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right| \leq \frac{1}{2^n(n+1)}$

Cherchons alors n pour que $\frac{1}{2^n(n+1)} \leq 10^{-2}$.

La calculatrice donne $n = 5$ et donc $\sum_{k=0}^{4} u_k$ est la valeur approchée souhaitée de J à 10^{-2} prés.

Exercice 5

1. En posant $g'(t) = cos(\lambda t)$, on, a comme $\lambda \neq 0$, $g(t) = \frac{1}{\lambda} sin(\lambda t)$. Comme f et g sont dérivables et de dérivées continues sur $[a,b]$, l'intégration par parties fournit :

$\int_a^b f(t) cos(\lambda t)\, dt = \left[\frac{1}{\lambda} f(t) sin(\lambda t)\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t) sin(\lambda t)\, dt$, ce qui donne

$$\int_a^b f(t) cos(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda} f(b) sin(\lambda b) - \frac{1}{\lambda} f(a) sin(\lambda a) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t) sin(\lambda t)\, dt \quad (*)$$

- $\left|\frac{1}{\lambda} f(a) sin(\lambda a)\right| \leq \frac{1}{\lambda}|f(a)|$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda} f(a) sin(\lambda a) = 0$.
- De même $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda} f(b) sin(\lambda b) = 0$
- De plus , on a $\left|\int_a^b f'(t) sin(\lambda t) dt\right| \leq \int_a^b |f'(t) sin(\lambda t) dt| \leq \int_a^b |f'(t)|\, dt$ on en déduit $\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t) sin(\lambda t) dt\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\, dt$ et on obtient $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t) sin(\lambda t)\, dt = 0$

Grace à la relation (*) et aux trois points précédents, on peut conclure : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t) cos(\lambda t) dt = 0$

2. a) On sait que $cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) = cos(kt) cos\left(\frac{t}{2}\right) - sin(kt) sin\left(\frac{t}{2}\right)$

On a aussi $cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) = cos(kt) cos\left(\frac{t}{2}\right) + sin(kt) sin\left(\frac{t}{2}\right)$

En ajoutant, on trouve : $cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) = 2cos(kt) cos\left(\frac{t}{2}\right)$

On a donc : $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $cos(kt) cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]$

b) $\forall\, t \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(kt) cos\left(\frac{t}{2}\right)$

Avec ce qui précède, on peut écrire :

$cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(kt) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]$, d'où

$$cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(kt) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right]$$

En effectuant le changement d'indice $i = k-1$ dans la deuxième somme, on a :

$$cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(kt) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1} cos\left(\frac{2i+1}{2}t\right)\right]$$

Ceci s'écrit aussi, en mettant -1 en facteur dans la deuxième somme :

$$cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k cos(kt) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i cos\left(\frac{2i+1}{2}t\right) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i cos\left(\frac{2i+1}{2}t\right)\right]$$

Les deux sommes se simplifient et seuls les termes correspondant à $i=n$ et $i=0$ subsistent, ce qui donne enfin :

$$\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)=\frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\cos\frac{t}{2}\right).$$

c) Comme $\frac{t}{2}$ appartient à l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ qui est inclus dans $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ ne s'annule pas, on peut donc diviser l'égalité précédente par $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)=(-1)^n\frac{\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$

Les fonctions de cette égalité sont continues sur $[0,1]$, on peut alors intégrer cette égalité sur $[0,1]$, ce qui donne, par linéarité de l'intégrale : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,dt=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt-\frac{1}{2}$$

Dans la somme de gauche, k ne prend que des valeurs non nulles, on a donc

$\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^1=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt-\frac{1}{2}$, ce qui donne finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin k}{k}=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt-\frac{1}{2}$$

Comme $u_k=(-1)^k\frac{\sin k}{k}$, on a bien trouvé : $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}u_k=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt-\frac{1}{2}$

3. La fonction qui à $t\mapsto\dfrac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est dérivable de dérivée continue sur $[0,1]$, on peut donc appliquer le résultat de la premiere question avec $\lambda=\frac{2n+1}{2}$, ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt-\frac{1}{2}$.

L'égalité obtenue à la question précédente permet d'écrire :

$\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}u_k+\frac{1}{2}\right|=\left|\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}dt\right|$, on en déduit alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}u_k+\frac{1}{2}\right|=0$.

On peut conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=0$.