Lycée pilote de Tunis	Calcul intégral 4	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1 « Vrai-Faux »

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $g(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt$

a) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]0,1]$.

b) Pour tout x réel, $0\le g(x)\le x^2-x$.

c) Dans un repère du plan et pour x_0 réel, $g(x_0)$ représente l'aire de la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites $x=x_0$ et $x={x_0}^2$

d) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $g'(x)=f(x^2)-f(x)$.

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, telle que f' soit continue et vérifie : il existe M réel tel que, pour tout x de $[0,1]$, $|f'(x)|\le M$ .On pose $I=\int_0^1 f(x)dx$ et $R_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que, pour tout u et v de $[0,1]$: $|f(v)-f(u)|\le M|v-u|$
2. Etablir l'inégalité : $|I-R_n|\le \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|dx\right]$
3. Déduire de ce qui précède que $|I-R_n|\le \dfrac{M}{2n}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n$.

Exercice3

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+cosx}}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé du plan. V le volume en unité de volumes du solide (S) obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe (C).

1. Pour $x\in]-\pi,\pi[$ on pose $F(x)=\int_0^x \dfrac{dt}{2+cost}$ et $G(x)=\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)} \dfrac{2}{3+t^2}dt$.

   a) Vérifier que $V=\pi F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

   b) Montrer que G est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et calculer $G'(x)$.

   c) En déduire que pour tout $x\in]-\pi,\pi[$, $G(x)=F(x)$.

2. Soit pour x réel $\varphi(x)=\int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$.

   a)Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(tanx)=x$.

   b) Montrer que pour tout $x\in]-\pi,\pi[$, $G(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

   c) Calculer V.

Exercice 4

On considère la fonction H_n définie sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ par : $H_n(x)=\int_0^{tanx}\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}dt$ ou $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que H_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ on a $H'_n(x)=\frac{1-tan^2(x)}{(1+tan^2(x))^n}$.
2. Vérifier que pour tout réel $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ on a $cos(2x)=\frac{1-tan^2(x)}{1+tan^2(x)}$. En déduire une expression plus simple de $H_1(x)$.
3. On considère les suites u et v définies par : $u_n=tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)$ et $v_n=\int_0^{u_n}\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

   a) Calculer la limite a de la suite u.

   b) Montrer que $v_n=\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

   c) Montrer que la suite $\left(v_n\right)$ converge vers $\int_0^a\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

Exercice 5

Pour n naturel, on considère les fonctions f_n définies sur [0,2] par :

$f_0(x)=\sqrt{x(2-x)}$, $f_n(x)=x^n\sqrt{x(2-x)}$, $n\geq 1$. On désigne par $\left(C_n\right)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. a) Vérifier que $\left(C_0\right)$ est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   b) Calculer le volume de la sphère engendrée par rotation de $\left(C_n\right)$ autour de $\left(O,\vec{i}\right)$.
2. On pose pour n entier naturel, $F_n(x)=\int_0^{1+sinx}f_n(t)dt$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

   a)Montrer que F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $F_n'(x)=cos^2x\left(1+sinx\right)^n$.

   b) Montrer que $F_0(x)=\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^2 f_n(x)dx$.

   a) Calculer I_0.

   b) Montrer a l'aide d'une intégration par parties sur $I_{n+1}-I_n$ que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=\frac{2n+3}{n+3}I_n$.

   c) En déduire que pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\frac{(2n+1)!}{2^n n!(n+2)!}\pi$.

Lycée pilote de Tunis	Calcul intégral 4	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice 1 **« Vrai-Faux »**

a) <u>Vrai</u> : il suffit d'étudier les variations de f sur ℝ.

b) <u>Faux</u> : Si $x \in]0,1[$ alors $x^2 - x$ est strictement négatif.

L'inégalité $0 \le g(x) \le x^2 - x$ ne peut pas être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ceci dit, cet encadrement est valable pour $x \in D =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

D'après la question a), la fonction f est strictement positive et majorée par 1 sur ℝ : pour tout réel t : $0 \prec f(t) \le 1$

Soit $x \in D$. Alors $x \le x^2$. En intégrant l'encadrement ci-dessous entre x et x^2, on obtient

$0 \prec \int_x^{x^2} f(t)dt \le x^2 - x$. D'ou pour tout $x \in D$: $0 \le g(x) \le x^2 - x$

c) <u>Faux</u> : Pour que l'intégrale entre a et b d'une fonction positive représente une aire, il est nécessaire que les bornes a et b vérifient $a \le b$. Le résultat n'est valable que pour $x_0 \in D$, si $x_0 \in]0,1[$ alors $g(x_0)$ représente l'opposé de l'aire d'écrite dans l'énoncé

d) <u>Faux</u> : Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Nous savons que pour tout réel x, F est définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. D'après Chasles, nous pouvons exprimer g à l'aide de F :

$g(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(x)$ et d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée $g'(x) = 2x\, f(x^2) - f(x)$.

Exercice 2

1. Il suffit d'appliquer le corollaire des inégalités des accroissements finies à la fonction f sur $[0,1]$.

2. $|I - R_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$. Or $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx$

$\Rightarrow |I - R_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)dx\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dx\right]$

3. Pour $1 \le k \le n$ on a : $0 \le \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n} \le 1$ donc d'après ce qui précède $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le M\left|x - \frac{k}{n}\right|$

On intègre les deux membre de cette inégalité , on aura $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dx \le M\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right| dx$.

Or $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right| dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - x\right)dx = \frac{k}{n^2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2n^2}$. Ainsi $|I - R_n| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{M}{2n^2}dx$ et donc

$|I - R_n| \le \frac{M}{2n}$.

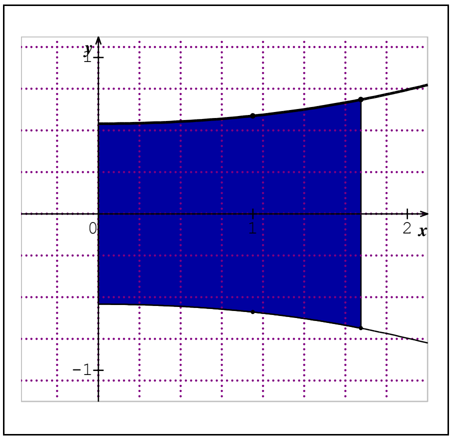
4. $\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{2n} = 0$ donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} R_n = I = \int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 3

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$; $2+cosx \succ 0$ donc f est restriction à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x)=\frac{sinx}{2(2+cosx)\sqrt{2+cosx}} \geq 0 .$$

f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.



b) Le volume du solide obtenu par rotation autour de $\left(O,\vec{i}\right)$ de la courbe de f est donné par

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=\pi F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

c) Soit $G(x)=\int_0^{tan\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{2}{3+t^2}\,dt$ et posons $H(x)=\int_0^{x}\frac{2}{3+t^2}\,dt$.

D'après le cours la fonction $t \mapsto \frac{2}{3+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$;

$H'(x)=\frac{2}{3+x^2}$. De plus $G(x)=H\left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)=(H\circ u)(x)$.

Pour $x\in\left]-\pi,\pi\right[$; $\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et comme u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors G est dérivable sur $\left]-\pi,\pi\right[$ et pour $x\in\left]-\pi,\pi\right[$; $G'(x)=H'\left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\times\frac{1}{2}\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$$=\frac{2}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\times\frac{1}{2}\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{2+\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{1}{2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}=\frac{1}{2+cosx}.$$

(*On rappelle que* $1+tan^2(a)=\frac{1}{cos^2(a)}$ et $cos(2a)=-1+2cos^2(a)$).

d) On a pour $x\in\left]-\pi,\pi\right[$ $G'(x)=F'(x)$ donc $G(x)=F(x)+k,\ k\in\mathbb{R}$. Or $G(0)=F(0)=0$ donc $k=0$ et par suite $G(x)=F(x)$ pour tout réel $x\in\left]-\pi,\pi\right[$.

2. a) la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

La fonction v : $x\mapsto\varphi(tanx)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $v'(x)=1$ donc $v(x)=x+k,\ k\in\mathbb{R}$ or

$v(0)=\varphi(tan0)=0$ et donc $\varphi(tanx)=x$ pour tout réel $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Soit la fonction k définie par $k(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $\left]-\pi,\pi\right[$ et φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc k est dérivable sur $\left]-\pi,\pi\right[$ et $k'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{3}tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}\frac{tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\frac{1}{3}tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}$

$= \frac{tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}{tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3} = \frac{1}{2+cosx} = F'(x) = G'(x)$ et donc la fonction k est constante et vaut $k(0)=0$ ce qui donne

$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ pour tout réel $x \in \left]-\pi,\pi\right[$.

c) $V = \pi F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\varphi\left(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$.

Exercice4

1. On introduit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}dt$. La fonction $t \mapsto \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}$ est rationnelle avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on sait que $\varphi'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$.

   On a de plus $H_n(x) = \varphi(tanx)$ et comme la fonction tangente est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ alors H_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ et $H_n'(x) = \left(1+tan^2x\right)\varphi'(tanx) = \left(1+tan^2x\right)\frac{1-tan^2x}{\left(1+tan^2x\right)^{n+1}} = \frac{1-tan^2x}{\left(1+tan^2x\right)^n}$.

2. $\frac{1-tan^2(x)}{1+tan^2(x)} = \frac{1-\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}}{1+\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}} = \frac{cos^2(x)-sin^2(x)}{cos^2(x)+sin^2(x)} = cos^2(x)-sin^2(x) = cos(2x)$.

   On a : $H'_1(x) = \frac{1-tan^2(x)}{(1+tan^2(x))} = cos(2x)$ donc $H_1(x) = \frac{1}{2}sin(2x)+k, k \in \mathbb{R}$ et

   $H_1(0) = \int_0^{tan0}\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^1}dt = \int_0^0 \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^1}dt = 0$ donc $k=0$ et $H_1(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

3. a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ainsi $a=1$.

   b) $v_n = \int_0^{tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = H_1\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right) = \frac{1}{2}sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)\right) = \frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

   c) $\int_0^a \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \int_0^{tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = H_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ et donc la suite (v_n) converge vers $\int_0^a \frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

Exercice 5

1. a) $M(x,y)\in(C_0) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2x-x^2} \\ y\geq 0, x\in[0,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2x-x^2 \\ y\geq 0, x\in[0,2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(x-1)^2=1 \\ y\geq 0, x\in[0,2] \end{cases}$.

(C_0) est alors le demi-cercle du cercle de centre (1,0) et de rayon 1 situé dans le demi-plan $y\geq 0$.

b) $\int_0^2 x^{2n}(2x-x^2)dx = \int_0^2 (2x^{2n+1}-x^{2n+2})\,dx = \frac{2^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)}$. D'où

$V = \pi\int_0^2 f^2(x)dx = \pi\int_0^2 x^{2n}(2x-x^2)dx = \frac{\pi\, 2^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)}$.

2. a) Posons $G_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$, G_n est dérivable sur $[0,2]$ car f_n est continue sur cet intervalle .

pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $F_n(x)=G_n(1+sinx)=G_n\circ u(x)$.

La fonction u est restriction à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et

$u\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,2]$ et comme G_n est dérivable sur $[0,2]$ alors F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout

réel x de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $F_n(x)=cosx\times G_n'(1+sinx)=cosx\,(1+sinx)^n\sqrt{1-sin^2x}=cos^2x\,(1+sinx)^n$ car sur

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $cosx\geq 0$

b) $F_0'(x)=cos^2x=\frac{1+cos2x}{2} \Rightarrow F_0(x)=\frac{1}{2}(x+sinx)+k$, $k\in\mathbb{R}$. Or $F_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow k=\frac{\pi}{4}$.

3. $I_{n+1}-I_n=-\frac{1}{2}\int_0^2 2(1-x)\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

On pose $\begin{cases} u'(x)=2(1-x)\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow u(x)=\frac{2}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ v(x)=x^n \qquad\qquad\qquad \Rightarrow v'(x)=nx^{n-1} \end{cases}$

$I_{n+1}-I_n=0+\frac{n}{3}\int_0^2(2x-x^2)x^{n-1}\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{n}{3}\left(\int_0^2 2x^n\sqrt{2x-x^2}-x^{n+1}\sqrt{2x-x^2}\right)dx=\frac{n}{3}\left(2I_n-I_{n+1}\right)$

Et donc $I_{n+1}=\frac{2n+3}{n+3}I_n$

$I_0=\int_0^2 f_0(t)dt=\frac{\pi}{2}$ vrai pour $n=0$. Supposons $I_n=\frac{(2n+1)!}{2^n n!(n+2)!}\pi$ alors

$I_{n+1}=\frac{2n+3}{n+3}\times\frac{(2n+1)!}{2^n n!(n+2)!}\pi=\frac{(2n+3)!}{2^n(n+3)(2n+2)n!(n+2)!}\pi=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+3)(n+1)n!(n+2)!}\pi=$

$\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+3)!(n+1)!}\pi$.