

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan(x)$.

a. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0, 1]$.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}} dt$.

a. On pose pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) = f^{-1}(t^n)$.

Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$.

b. En déduire I_n en fonction de n .

3. Soit $J_n = \int_0^1 \frac{t^{3n-1}}{(1+t^{2n})^2} dt$ avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

a. Montrer que $J_n = \frac{-1}{4n} + \frac{1}{2} I_n$.

b. En déduire la valeur de $A = \int_0^1 \frac{t+2t^5}{(1+t^4)^2} dt$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

On pose pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$.

1) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2) Calculer $\int_1^n f(t) dt$, $n \geq 1$ et vérifier que $0 \leq \int_1^n f(t) dt \leq \frac{1}{2}$.

3) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\int_2^{n+1} f(t) dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$.

d) En déduire que la somme $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$ converge et donner un encadrement de sa limite.