Lycée Pilote Sfax A/S : 2019-2020	Série N°22 (Intégrales)	$4^{ème}$ Math Mr Jellali

Exercice 1

A/ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3.

② a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

B/ Dans cette partie on se propose de calculer la limite L de la suite (u_n).

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_0^{\alpha} \sin^n(x)dx$ et $w_n = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le v_n \le \alpha \sin^n(\alpha)$.

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le w_n \le \frac{\pi}{2} - \alpha$.

③ En déduire que $0 \le L \le \frac{\pi}{2} - \alpha$.

④ Supposons que $L > 0$.

a) Soit $\alpha_0 \in \left]\frac{\pi}{2} - L, \frac{\pi}{2}\right[$, utiliser la question ③ pour comparer α_0 et $\frac{\pi}{2} - L$.

b) Conclure.

Exercice 2

I/ On considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Soit h la fonction réciproque de g. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $h'(x)$.

II /Soit $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) = 2(n+1) \end{cases}$.

Soit (U_n) la suite définir sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$.

1) Montrer que (U_n) est bien définie.

2)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. Calculer U_0, U_1 et U_2.

b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 2\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

3)a) Calculer $\int_0^1 dx$ et $\int_0^1 x^{2k}\,dx$, $k \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n = 2\int_0^1 \dfrac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\left|U_n - 2\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}\right| \le \dfrac{2}{2n+3}$.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

NB : On donne la forme trigonométrique : $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.