| Lycée Pilote Sfax<br>A/S : 2019-2020 | Série N°24<br>(Intégrales) | 4ème Math<br>Mr Jellali |
|---|---|---|

## Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. $(\|\vec{i}\|=2cm)$.

1) Etudier f et tracer (C).

2) On désigne par F la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\tan^2 x} f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F'(x)=4\tan^2 x$.

b) Calculer F(0) puis exprimer F(x) en fonction de x.

c) Calculer $J=\int_0^1 f(t)dt$.

d) Déterminer alors l'aire $\mathcal{A}$ en cm² de la partie du plan limitée par (C) et les droites $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

3) On pose $S_n=\dfrac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\sqrt{k}}{n+k}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$ on a $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $J\le S_n\le J+\dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

## Exercice 2

I) Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_0^{1+\cos x} 2\sqrt{2t-t^2}\,dt \quad ;\forall x\in[0,\pi]$.

1) Montrer que F est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer $F'(x)$.

2) En déduire que $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-x+\pi \ \forall x\in[0,\pi]$.

II) Soit $(I_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_0=\int_0^2 2\sqrt{2x-x^2}dx$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^2 2x^n\sqrt{2x-x^2}dx$.

1) Calculer $I_0$.

2) Calculer $I_0-I_1$. En déduire $I_1$.

3)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_n-I_{n+1}=\int_0^2 x^n(2-2x)\sqrt{2x-x^2}dx$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $I_{n+1}=\left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right)I_n$.

4) Montrer que $(I_n)$ est croissante. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\ge\pi$.

5) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

## Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\int_x^{2x}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^3}}dt$.

1)a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(x)$.

b) En déduire que f admet un maximum en $a=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$.

2)a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{x}{\sqrt{1+8x^3}}\le f(x)\le\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.