

Exercice 1 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse :

1° Soit l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ alors :

- a) $I < 0$ b) $I > 0$ c) $I = 0$.

2° Pour tout $x \in [-1,0[$. On pose : $F(x) = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{1+|t|}} dt$, $a \in]-1,0[$. Alors :

- $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ c) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

3° Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,1]$ et $I = \int_0^1 f(x) dx$. Alors :

- a) $I > 0$ b) $f(1) \leq I \leq f(0)$ c) $f(0) \leq I \leq f(1)$.

Exercice 2 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1° Si f est continue et positive sur \mathbb{R} alors $\forall a, b \in \mathbb{R} : \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2° Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a : $\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt = x$.

3° Si f est impaire , définie et dérivable sur \mathbb{R} alors $\int_{-1}^1 x f'(x) dx = 0$.

4° a et $b \in \mathbb{R}$ et f est continue sur \mathbb{R} si $\int_a^b f(x) dx = 0$ alors $a = b$.

5° Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ tel que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$

6° Soit f une fonction continue et croissante sur \mathbb{R} alors

- a) la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ est croissante
b) la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \int_0^n f(x) dx$ est croissante

7° Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et g la fonction définie par $g(x) = \int_0^x x f(t) dt$ Alors $g'(x) = x f(x)$

Exercice 3 :

La courbe \mathcal{C} (annexe) est la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

1) Soit F la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[= I$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2(x)} f(t) dt$

a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in I$ on a : $F(x) = 2(x - \frac{\pi}{4})$

2) Soit $t > 0$ et D_t le domaine du plan délimité par \mathcal{C} les droites d'équations respectives

$x = 1$, $x = t$ et $y = 0$ et soit $\mathcal{A}(t)$ la mesure de aire exprimé en unité d'aire.

Hachurer D_3 et $D_{\frac{1}{3}}$ puis calculer $\mathcal{A}(3)$ et $\mathcal{A}(\frac{1}{3})$

3) a) Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$ l'équation $\mathcal{A}(t) = 2$ admet une unique solution sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

b) Montrer que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}\left(\frac{1}{t}\right)$ (on pourra remarquer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$)

c) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2\mathcal{A}(t) = \pi$. Interpréter graphiquement ce résultat

Exercice 4:

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$

1)a) Calculer U_1

b) Vérifier que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ puis déduire un encadrement de u_0

2)a) Montrer que (U_n) est décroissante minorée

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déduire la limite de (u_n)

3) Pour tout entier $n \geq 3$ on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 3$ on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$

b) Par une intégration par partie pourtant sur I_n . Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a :

$$(n-1)I_n + U_n = \sqrt{2} \quad \text{Puis déduire que} \quad nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$$

c) En déduire que pour tout $n \geq 3$ on a $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ puis déterminé la limite de $n(U_n)$

Exercice 5:

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{t} dt$ et $I_n = \int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1/ a) Calculer I_0

b) Montrer que (I_n) est décroissante minorée

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n)

2/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ puis exprimer I_n en fonction de n

3/ Soit G la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $G(x) = \int_0^{x^2} (1-t)^n \sqrt{t} dt$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a : $G(x) = \int_0^x 2t^2 (1-t^2)^n dt$ puis déduire que $I_n = \int_0^1 2t^2 (1-t^2)^n dt$

b) à l'aide d'une intégration par partie montrer que $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt$

c) En déduire alors que $\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{(-1)^k}{2k+1} = (n+1)I_n$

Exercice 6

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{2-t} dt$ $I_n = \frac{1}{2^n} \int_0^2 t^n \sqrt{2-t} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. a. Calculer I_0

b. Montrer que (I_n) est décroissante minorée

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq I_n \leq \frac{2\sqrt{2}}{n+1}$ puis déduire la limite de I_n

3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ puis exprimer I_n en fonction de n

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1°/ a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat

b) Dresser le tableau de variati



2°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$, $\forall x \in J$.

c) Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un R. O. N. unité graphique 2 cm .

3°/ Soit A l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

$$\text{Montrer que } A = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

4°/ Soit $F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}] = I$.

a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$.

b) En déduire l'expression de $F(x)$, puis calculer A .

5°/ Soit $C = \{M(x, f(x)), x \in [1, 2]\}$ et S le solide obtenue en tournant C autour de l'axe des abscisses . Calculer le volume de S .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1.a. Etudier f et tracer C_f

b. Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ et F la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{Par } F(x) = \int_0^{\tan(x)} g(x) dx$$

a. Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ puis déduire que $F(x) = \tan(x) - x$

b. Soit $C = \{M(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$ et S le solide obtenue en tournant C autour de l'axe des abscisses .

Calculer le volume de S .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{k^2+n^2}$

a. Etudier les variations de g

b. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, on a $\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(x) dx \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right)$

c. En déduire que $1 - \frac{\pi}{4} \leq S_n \leq 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}$ puis déduire la limite de S_n

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$

1°/ a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat

b) Dresser le tableau de variation de f . et tracer C_f

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer l'expression analytique de R

b) Déterminer une équation de $C' = R(C_f)$ et construire dans le même repère

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites $y = 0$, $x = 1$ et $x = 4$



Exercice 10 :

On pose $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t} dt$ et on considère les suites (u_n) et (r_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t) dt \quad \text{et} \quad r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} dt \quad \text{et soit} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

1) a) Montrer que $J = s_n + r_n$

b) Montrer que $r_n \leq \frac{1}{2^{n(n+1)}}$ puis déduire la limite de s_n

2) Calculer u_0 et u_1 .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2} \right)$.

b) En utilisant les résultats précédents, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

Exercice 11:

1°/ soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dt$; $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer I_0 et vérifier que $I_1 = \frac{1}{3}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = \frac{n}{3+n} I_{n-1}$.

Calculer I_2 et I_3 .

2°/ a) Montrer que (I_n) est décroissante et minorée par 0 .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n) .

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{3+n}{n}$. En déduire la limite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$.

Exercice 12:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{3+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1.. Etudier f et tracer C_f

2. Soit F et G les fonctions définies sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par

$$\text{Par } F(x) = \int_0^{\sqrt{3}\tan(x)} f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{\sqrt{3}\tan(x)} (f(t))^2 dt$$

a. Montrer que F et G sont dérivable sur I et calculer $F'(x)$ et $G'(x)$

b. En déduire que $F(x) = \sqrt{3}x$ et $G(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x + \sin(2x))$

c. Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.

d. Soit $C = \{M(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$ et S le solide obtenue en tournant C autour de l'axe des abscisses .

Calculer le volume de S .

e. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_3^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$ interpréter graphiquement le résultat

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{-1}{3}\right)^k \frac{1}{2k+1}$ et $R_n = \int_0^1 t^{2n+2} f(t) dt$

a. Montrer que $f(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^{2k} + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} t^{2n+2} f(t)$.

b. En déduire que $S_n + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} R_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$



c. Montrer que $0 \leq R_n \leq \frac{1}{2n+3}$ puis déduire la limite de S_n *

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1.. Etudier f et tracer C_f

2. Soit F la fonction définie sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ Par $F(x) = \int_0^{\tan(x)} f(t) dt$

a. Montrer que F est continue sur I et calculer

b. Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$ puis déduire l'expression de F

C. Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$ et $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

3.a. Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $1 - t^4 \leq \frac{1}{1+t^4} \leq 1$

b. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $\frac{1}{2} \tan(x) - \frac{1}{6} \tan^3(x) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \tan(x)$

c. Montrer alors que F est dérivable à droite en 0 et calculer $F'_d(0)$

Exercice 14

Soit h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $h(x) = (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}$ et C_h sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1.a. Etudier la dérivabilité de h à droite en -1 et à gauche en 1

b. Dresser le tableau de variation de h et tracer C_h

2. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = \int_{-1}^1 1 dx$ et $u_n = \int_{-1}^1 (\sqrt{1 - x^2})^n dx \forall n \in \mathbb{N}^*$

a. Calculer u_0 , u_1 et u_2

b. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $u_n = \frac{n}{n+1} u_{n-2}$

3. Soit (a_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{2n-1} = \pi a_n$ et $u_{2n} = \frac{2}{(2n+1)a_n}$

b. Montrer que (u_n) est décroissante minorée

c. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{2}{\pi} \leq (2n+1)a_n^2 \leq \frac{2n+2}{2n+1} \frac{2}{\pi}$

d. En déduire la limite (a_n) et la limite (u_n)



Exercice 15:

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit les suites $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt$ et $J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt$.

1°/a) Calculer I_0 et J_0 .

b) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on a $I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}$. puis déduire I_k en fonction de k

c) Montrer que (I_k) est décroissante et minorée, conclure.

2°/ A l'aide de deux intégrations par partie porter sur I_k montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1) J_{k-1}$$

3°/ Soit $k \in \mathbb{N}$, $w_k = \frac{I_k}{I_k}$ et $S_n = (1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2})$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$ puis que $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2 I_k}{8(k+1)}$

b) Montrer que $S_n = 2(w_0 - w_n)$. et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 16:

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f continue sur \mathbb{R} et tel que $f(1) = 0$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
f'		+	-	+
$f(x)$		3	-5	-1

Diagram description: A table showing the variation of a function f. The x-axis has critical points at -4 and 2. The function values at these points are 3 and -5 respectively. The function is increasing on (-4, 2) and decreasing on (2, +infinity). There is a point (1, 0) marked on the curve with an arrow pointing to it from the value 1 on the x-axis.

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

1. Etudier les variations de F
2. Etudier le signe de $F(x)$
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en $-\infty$

