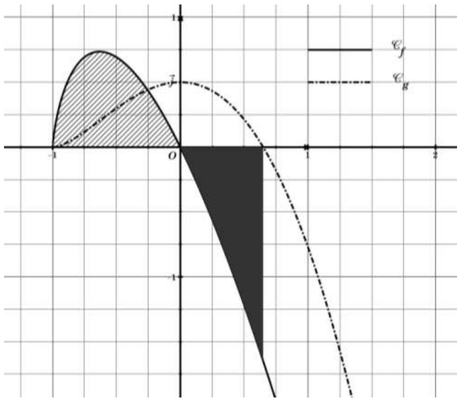
SÉRIE INTÉGRALES

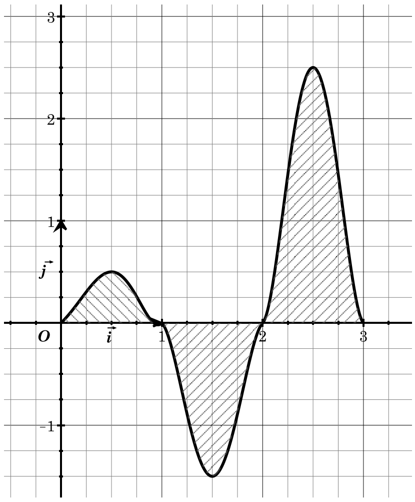
Exercice 1 :

1) Calculer les intégrale s : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1+\sin x)^2dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5(x)dx$. ; $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$.



2) Dans la figure ci-contre on a représenté les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ où $g'=f$. Ces deux fonctions sont définies sur $[-1\,;+\infty[$. Répondre par vrai ou faux en justifiant.
   a) $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion.
   b) Pour $x\geqslant -1$, $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   c) La partie hachurée et celle pleine ont la même mesure d'aires.

3) Pour chaque question cocher la ou les bonnes réponses.
   a) La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $[0\,;3]$. L'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aires, de la partie hachurée est telle que :

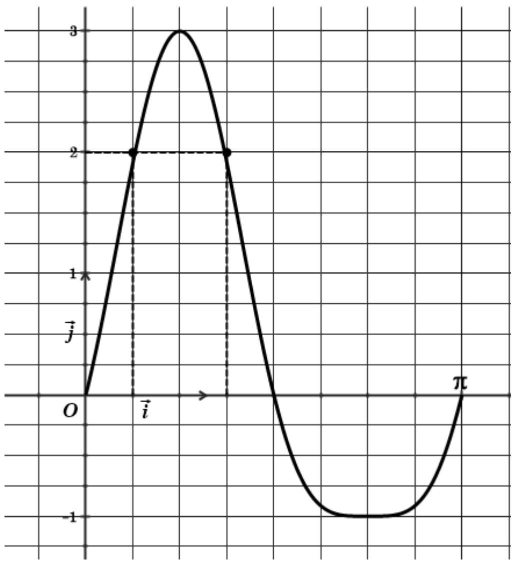


☐ $\mathscr{A}<5$ ☐ $\mathscr{A}=5$ ☐ $\mathscr{A}>5$

   b) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que le point $I(1,0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$. Alors $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$ est égale à :

☐ 0 ☐ $2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ ☐ $2+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

Exercice 2 :



La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $[0\,;\pi]$. Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.
2) $\left|\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_0^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x$.
3) $-\pi\leqslant\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{3\pi}{2}$.
4) La valeur moyenne de f est nulle.
5) Il existe un réel $a\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$\pi f(a)=\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $I=\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan^2(x)$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) Montrer que f réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}^+$. Tracer la courbe Γ de f^{-1}.
3) Soit $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^1 f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. Calculer I et J.
4) Calculer le volume du solide obtenu par rotation de la partie de $\mathscr{C}$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ autour de l'axe des abscisses.

Exercice 4 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_1 ; I_1+I_3 et I_3.
2) Montrer que la suite I est décroissante . En déduire qu'elle converge.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de I.
4) Montrer que pour tout $n\geqslant 3$; $I_n+I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
5) Montrer que pour $n\geqslant 3$, $nI_n+(n-1)I_{n-2}=\sqrt{2}$. En déduire la limite de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5 :

1) Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin x$.
   a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur [-1 ; 1].
   b) Montrer que est dérivable sur]-1 ; 1[et que pour tout $x\in]-1\,;\,1[$ on a : $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+....+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g'\left(\frac{k}{n}\right)$.
   b) Soit $n\geqslant 2$ et $0\leqslant k\leqslant n-2$. Montrer que : $\frac{1}{n}g'\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g'(x)dx\leq\frac{1}{n}g'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
   c) En déduire que $S_n-\frac{1}{n}g'\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq\int_0^{1-\frac{1}{n}} g'(x)dx\leq S_n-\frac{1}{n}$.
   d) Calculer la limite de la suite (S_n) .

Exercice 6 :

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(x)}{\cos^{2n+1}(x)}dx$.

1) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n-I_{n-1}=J_n$. En déduire la monotonie de la suite (I_n).
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\frac{2^n}{\sqrt{2}}-(2n-1)J_n$.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2nI_n=\frac{2^n}{\sqrt{2}}+(2n-1)I_{n-1}$.
4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geq\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2n}}$.

5) Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geq n^2$. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

1) Etudier f et construire $\mathcal{C}_f$ la courbe representative de f dans le repère orthonormé

2) On considère la fonction F définie par $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur IR et préciser sa fonction dérivée.

b) Montrer que F est impaire.

3) Soit x un réel strictement positif.

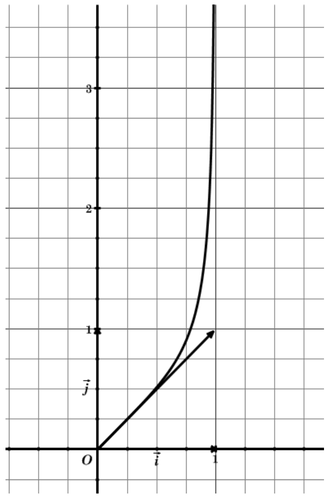
a) Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$ on a $0 \leq f(t) \leq f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x > 0$ on a $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

d) Dresser le tableau de variations de F et tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Exercice 8 :

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$. On a représenté ci-contre la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$,dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que ,pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $F(x)=\dfrac{x}{2}$.

c) Trouver alors l'aire A de la partie du plan limitée par C_f et les droites $y=x$, $x=0$ et $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Soit $\lambda \in \left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$,on pose $I(\lambda)=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{\sin\lambda}} \dfrac{\sqrt{1-t^4}}{t^3}\,dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\lambda)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to \frac{\pi}{2}^-} I(\lambda)$.

Exercice 9 :

Soit f une fonction définie continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On note $l = \lim\limits_{+\infty} f$. (l finie ou infinie) Pour tout réel a, on pose $F_a(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que F_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Dans cette question $f(t)=\dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ et soit $g(x)=\tan x$, $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que pour tous réels a et x, $F_a(x) < 1$.

3) Dans la suite f est quelconque de façon l est non nulle. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_a(x) = +\infty$.

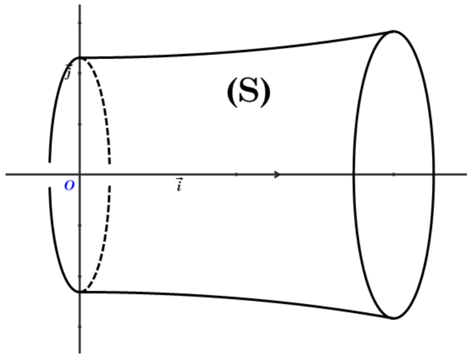
a) Montrer que l'équation $F_a(x)=1$ admet une solution unique notée φ(a).

b) Soit G_0 la réciproque de F_0. Montrer que $\varphi(a)=G_0(1+F_0(a))$.

c) En déduire que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (Sans calcul de dérivée).

d) On suppose que que f ne s'annule pas. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(a)=\dfrac{f(a)}{f(\varphi(a))}$.

Exercice 10 :



Dans la figure ci-contre, le solide (S) est obtenu en faisant tourner la courbe de la fonction f définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+\cos x}}$ autour de l'axe des abscisses. On note $\mathcal{V}$ le volume de (S) en unités de volumes.

1) Pour $x\in]-\pi\,;\pi[$ on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}$ et $G(x)=\displaystyle\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que $\mathcal{V}=\pi F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que G est dérivable sur $]-\pi\,;\pi[$ et calculer $G'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x\in]-\pi\,;\pi[$, $G(x)=F(x)$.

2) Soit $H(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$; $x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $H(\tan x)=x$.

b) Montrer que pour tout $x\in]-\pi\,;\pi[$, $G(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}H\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

c) Calculer $\mathcal{V}$.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

1) Etudier f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{\tan^2(x)} f(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est dérivable et déterminer sa dérivée.

b) Déterminer $F(x)$ en fonction de x.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

3) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{2}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{k}}{n+k}$.

a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$

b) Montrer que pour $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$: $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\leqslant\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

c) En déduire que $\mathscr{A}-\dfrac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant\mathscr{A}$. Calculer la limite de u.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\int_0^{\sqrt{\tan x}}\frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $f'(x)$.

2) Montrer que pour $x\in\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\tan x}{2x(1+\tan^2 x)}\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{\tan x}{2x}$. En déduire que f est dérivable à droite en 0.

3) Expliciter $f(x)$. En déduire la valeur de $I=\int_0^1\frac{t}{1+t^4}\mathrm{d}t$.

4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout réel t, $\frac{t}{1+t^4}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k+1}+(-1)^{n+1}\frac{t^{4n+5}}{1+t^4}$.

5) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4k+2}$ et $v_n=(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{4n+5}}{1+t^4}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $|v_n|\leqslant\frac{1}{4n+6}$.

b) En déduire la limite de u.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. On pose $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^n(x)\mathrm{d}x$.

Partie A :

1) Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I}=\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=\tan x$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathrm{J}$, $g^{-1}(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

2) Soit $F(x)=\int_0^{\sin x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ où $x\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que pour tout $x\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

b) En déduire alors la valeur de I_0.

3) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

4) Montrer que pour tout n, $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$. En déduire que $I_n\geqslant\frac{1}{2n+2}$.

5) Montrer que pour $n\geqslant 2$, $I_n\leqslant\frac{1}{2n-2}$. En déduire la limite de (I_n) et de (nI_n).

Partie B :

Pour tout $n\geqslant 2$, on pose : $\varphi(t)=g^{-1}\left(t^n\right)$ où $t\in[0,1]$; $J_n=\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}dt$ et $U_n=\int_0^1\frac{t^{3n-1}}{\left(1+t^{2n}\right)^2}dt$.

1) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.
2) Calculer J_n en fonction de n.
3) Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $U_n=\frac{-1}{4n}+\frac{1}{2}J_n$.
4) En déduire la valeur de $A=\int_0^1\frac{t+2t^5}{\left(1+t^4\right)^2}dt$.

Exercice 14 :

f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ où $a < b$ et g strictement positive. Montrer qu'il existe un réel $c \in [a\ ;\ b]$ tel que : $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 15 :

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

1) Calculer I_1.
2) Montrer que la suite (I_n) est monotone et qu'elle converge.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. En déduire I_2 et I_3.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}$. En déduire la limite de $\frac{I_n}{I_{n+1}}$.
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$. En déduire la limite de la suite (I_n).
6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{C_{2n}^n \pi}{2^{2n+1}}$ et que $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.