Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°24 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice n°1 :Soit f la fonction definie sur $[-1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x+1}$

et soit (C) sa courbe representative dans un repere orthonorme $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier la derivabilite de f a droite en -1.

b) Etudier les variations de f.

c) Tracer la courbe (C).

d) Calculer l'aire de la partie du plan limitee par la courbe C et les droites d'equations respectives : $y=0$; $x=-1$ et $x=0$.

2) Soit u la suite definie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x}\,.dx$ et $\forall n\geq 1$, $u_n=\int_{-1}^{0}x^n\sqrt{1+x}.dx$

a) Calculer u_0.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(2n+5)u_{n+1}=-2(n+1)u_n$ .en deduire que $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n=\dfrac{(-1)^n\,2^{2n+2}\,n!\,(n+1)!}{(2n+3)!}$

3) a) En utilisant le theoreme de l'inegalite des accroissements finis , montrer que pour tout $t\in[0,1]$, $0\leq\sqrt{2}-\sqrt{1+t}\leq\dfrac{1-t}{2}$.

b) On pose $v_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$; $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\forall n\geq 1$ on a : $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}-v_n\right|\leq\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}nv_n$

Exercice n°2 : Soit f la fonction definie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\tan^2 x$.

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f realise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on precisera.

c) Tracer dans un R.O.N.D $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C et C' des fonctions f et f^{-1}.

2) a) Soit l'integrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$, interpreter graphiquement I.

b) Calculer I puis deduire la valeur de l'integrale $J=\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

3) Soit A le domaine limite par la courbe C et les droite d'equations respectives $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Soit S le solide de revolution obtenu par rotation de A au tour de l'axe $(O,\vec{i})$.

Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\dfrac{1}{3}$ en deduire le volume de S.

Exercice n°3 : Soit $I_n=\int_0^1(1-t^2)^n dt$ et $J_n=\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

1) a) Exprimer I_{n+1} al'aide de I_n et J_n .

b) Montrer que : $I_{n+1}=2(n+1)J_n$ en deduire une relation entre I_{n+1} et I_n .

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\dfrac{2^n n!}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)}$.

2(n+1)

2) Soit u la suite definie par : $u_n=1+\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1\times2}{1\times3\times5}+\ldots+\dfrac{n!}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)}$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=2\int_0^1\left(\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}\right)dt$

3) Soit la fonction $F(x)=\int_0^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\dfrac{dt}{1+t^2}$ $\forall x\in]-1,1[$ et soit $I=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que F est derivable sur $]-1,1[$ et calculer sa fonction derivee, en deduire que pour tout $x\in]-1,1[$ $F(x)=\dfrac{\pi}{2}x$.

b) calculer I.

4) pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose: $v_n=2I-u_n$, montrer que : $0\leq v_n\leq\dfrac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. en deduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Série 24

Ex 1

Soit $f : [-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x\sqrt{x+1}$

1/a/ $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$= -\infty.$

b/ La fct : $x \mapsto x+1$ dérivable et >0 sur $]-1,+\infty[$

La fct : $x \mapsto \sqrt{x+1}$ " sur $]-1,+\infty[$

" : $x \mapsto x.\sqrt{x+1}$ " " $]-1,+\infty[$

pour $x\in]-1,+\infty[$,

$f'(x) = \sqrt{x+1} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

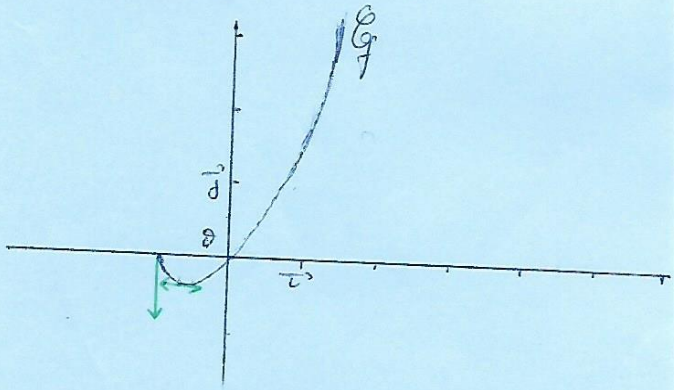
$= \dfrac{2x+2+x}{2\sqrt{x+1}}$

$= \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

x	-1		$-2/3$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-0,385$	↗	$+\infty$

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty.$

donc $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$.



d/ $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx$

$= \int_{-1}^{0} -f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx.$

$=$ ~~[illegible]~~

On pose $u(x) = x$

$v'(x) = \sqrt{x+1}$

$-\int_{-1}^{0} (x.\sqrt{x+1})\,dx = -\left(\left[\frac{2}{3}x.(x+1)\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{2}{3}(\right.$

$-\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(x.\sqrt{x+1}\,dx) + \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,dx - [\,\ldots$

$-\frac{5}{3}\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1} = +\left[\frac{2}{3}.\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{2}{3}x(x+1)\sqrt{\ldots}\right.$

$-\frac{5}{3}\int_{-1}^{0} x\sqrt{1+x} = \frac{4}{9}.(1-0) - \frac{2}{3}.(0-0).$

$\int_{-1}^{0} x\sqrt{1+x} = \frac{4}{15}$ u.a.

2/ ~~[illegible]~~ $\begin{cases} u_0 = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+x}\,dx \\ U_n = \int_{-1}^{0}(x^n.\sqrt{1+x})\,dx, \quad n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

a/ $U_0 = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+x}\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0}$

$= \frac{2}{3}$

b/ On a $U_{n+1} = \int_{-1}^{0} x^{n+1}\sqrt{1+x}\,dx$

On pose $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = x^n.(n+1)$

$v'(x) = \sqrt{1+x}$, $v(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$

$U_{n+1} = \left[\frac{2}{3}x^{n+1}.(x+1)\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0} - \frac{2}{3}(n+1)\int_{-1}^{0} x^n \ldots$

$U_{n+1} = \frac{-2}{3}(n+1)\int_{-1}^{0} x^n\sqrt{x+1}\,dx + \frac{-2}{3}(n+1)\underbrace{\int_{-1}^{0} x^{n+1}\sqrt{1+\ldots}}_{U_{n+1}}$

$\left(\frac{2}{3}(n+1)+1\right)U_{n+1} = \frac{-2}{3}(n+1).U_n.$

$(2n+2+3)U_{n+1} = -2(n+1)U_n$

$(2n+5)U_{n+1} = -2(n+1)U_n$, pour $n\in\mathbb{N}$.

c/ pour $n=0$,

$\dfrac{(-1)^0.2^2.\,0!\,(1+0)!}{(2.0+3)!} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} = U_0.$

pour $n\in\mathbb{N}$, Supposons que $U_n = \dfrac{(-1)^n.2^{2n+2}.n!\,(\ldots}{(2n+3)!}$

Montrons que : $U_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}.2^{2n+4}.(n+1)!\,.(\ldots}{(2n+5)!}$

On a $(2n+5)U_{n+1} = -2(n+1)U_n$

$(2n+5)U_{n+1} = -2(n+1)\dfrac{(-1)^n.2^{2n+2}.n!\,(n+1)\ldots}{(2n+3)!}$

$U_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}.2^{2n+3}.(n+1)!\,(n+1)!\times(2\ldots}{(2n+5)\times(2n+3)!\times(2n\ldots}$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}.\,2^{2n+4}\ldots}{(2n+5\ldots}$

3/a/ On pose $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x+1}$.

h est dérivable sur $[0,1]$,
pour $x \in [0,1]$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

$0 \leq x \leq 1$

$0 < 2 \leq 2\sqrt{1+x} \leq 2\sqrt{2}$

$0 < \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$.

~~pour~~ pour tout $t \in [0,1]$,

h dérivable sur $[t,1]$,

et $\forall x \in [t,1]$, $h'(x) \in [0, \frac{1}{2}]$.

D'après le théorème d'accroissements finis,

$0 \leq h(1) - h(t) \leq \frac{1-t}{2}$

$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1-t}{2}$, pour $t \in [0,1]$.

b/ Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1-t}{2}$

$0 \leq t^n\sqrt{2} - t^n\sqrt{1+t} \leq \frac{t^n - t^{n+1}}{2}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

$0 \leq \int_0^1 (t^n\sqrt{2} - t^n\sqrt{1+t})\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{2}\,dt$

$0 \leq \sqrt{2}\left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 - V_n \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1} - \frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1$

$0 \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} - V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{n+1} - V_n\right| \leq \frac{n+2-n-1}{2(n+1)(n+2)}$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{n+1} - V_n\right| \leq \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c/ On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sqrt{2}}{n+1} - V_n\right| \leq \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = 0$.

d'où $\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

$= 0$.

On a $\left|\frac{n\sqrt{2}}{n+1} - nV_n\right| \leq \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} - nV_n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} nV_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

avec $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2(\ldots)}$

Ex 2

Soit $f : [0, \frac{\pi}{4}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan^2 x$.

1/a/ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, f est dérivable et on a :

$f'(x) = 2\tan x(\tan^2 x + 1) \geq 0 \quad (x \in [0, \frac{\pi}{4}[)$.

x	0		$\pi/4$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	1

f est strictement monotone sur $[0, \frac{\pi}{4}[$, ($f'(x)$ ne s'annule qu'en 0). d'où elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}[$ sur $J = [0, 1[$.

2/ $I = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$.

a/ I est l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ et les droites : $y = 0$, $x = 0$, et $x = \frac{\pi}{4}$.

b/ $I = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1 - 1)\,dx$ (Par raison de symétrie)

$= [\tan x - x]_0^{\pi/4}$

$= 1 - \frac{\pi}{4} - 0$.

$= \frac{4 - \pi}{4}$ u.a.

$\int_0^{\pi/4} f^{-1}(x)\,dx = \frac{\pi}{4} - I$

$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}$

$= \pi/2 - 1$ u.a.

3/ $A = I$.

$\int_0^{\pi/4} f^2(x)\,dx + \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/4} (\tan^4 x + \tan^2 x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^2 x(\tan^2 x + 1)\,dx$

$= \left[\frac{\tan^3 x}{3}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{3}$.

$V = \pi \int_0^{\pi/4} f^2(x)\,dx$

$= \pi\left(\frac{1}{3} - I\right)$

$= \pi\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{2\pi}{3}$ u.v.

Ex 3

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$, $J_n = \int_0^1 t^2(1-$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1) a) $I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^n\,dt$

$= \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$

$= I_n - J_n$

b/ $J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$

On pose $u(t) = t \longrightarrow u'(t) = 1$

$v'(t) = t(1-t^2)^n \longrightarrow v(t) = \frac{-1}{2(n+}$

$J_n = \left[\frac{-1}{2(n+1)} \cdot t \cdot (1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}$

$J_n = \frac{1}{2(n+1)} \cdot I_{n+1}$.

$\Rightarrow I_{n+1} = 2(n+1) J_n$.

d'où $I_{n+1} = 2(n+1)(I_n - I_{n+1})$

$(2(n+1)+1) I_{n+1} = 2(n+1) I_n$

$(2n+3).\, I_{n+1} = 2(n+1) I_n$.

$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$.

c/ pour $n = 0$,

$I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0\,dt = \int_0^1 1\,dt = [t]_0^1 =$

or $\frac{2^0 \cdot 0!}{1} = 1 = I_0$.

pour $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $I_n = \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}$

Tq $I_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!}$

On a $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$

$= \frac{2(n+1)}{(2n+3)} \cdot 2^n$