Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°26 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

1) Calculer U_1.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2}U_n$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On assimile un oeuf à un solide de révolution obtenu par rotation autour de l'axe $(O,\vec{i})$ de la courbe (C) de la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$.

1) Calculer le volume de cet oeuf.

2) Soit F la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \int_0^{1+\sin x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire qu $F(x) = x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(2x)$ pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculer l'aire de ka partie du plan limitée par la courbe (C) et la courbe (C') de la fonction

Exercice 3 :

1) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \sqrt{t(1-t)}\,dt$.

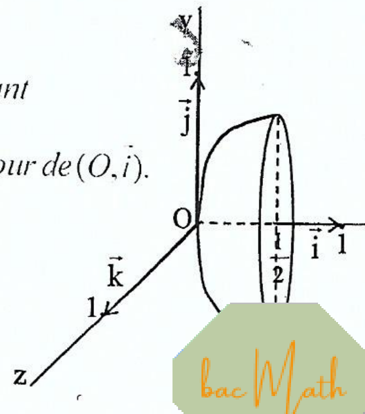
a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x) = \frac{1}{4}(1-\cos(4x))$.

b) Exprimer $F(x)$ en fonction de x pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) L'espace est muni d'un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = \sqrt[4]{x(1-x)}$, $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ au tour de $(O,\vec{i})$.

Calculer le volume du solide (S).



$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

Exercice 4:

I. On considère l'application g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan x$.

1) Montrer que g est une bijecion de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

2) Soit h la réciproque de g. Montrer que h est dérivable sur IR_+ et que pour tout $x\in IR_+$ on a : $h'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

II. Pour tout entier naturel n, on note f_n l'application de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans IR définie par :

$f_n(x)=\frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$ pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $f_n(0)=2(n+1)$.

Soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx$.

1) Montrer que f_n est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que la suite u est bien définie.

2)a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=2.\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. Calculer u_0, u_1 et u_2.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

3)a) Calculer $\int_0^1 dx$ et $\int_0^1 x^{2k}dx$, $k\in IN^*$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=2\int_0^1\frac{1+(-1)^n.x^{2x+2}}{1+x^2}dx$.

c) Etablir que pour tout entier naturel n, $\left|u_n-2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right|\leq\frac{2}{2n+3}$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Prof:M.BenAli

$\sin \frac{a}{2}$

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Série 26

Ex 1

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot dx$

1/ $U_1 = \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot dx.$

$= \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

$= \left[\sqrt{x^2+2x+2}\right]_{-1}^{0}$

$= \sqrt{2} - 1.$

2/a/ $U_{n+1} - U_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx - \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Pour $x \in [-1, 0]$, $0 \leq x+1 \leq 1$

$0 \leq \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+2x+2}} \leq \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; pour $n \in \mathbb{N}$.

et $-1 < 0$, donc

$\int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+1} dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \leq \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

d'où $U_{n+1} - U_n < 0.$

d'où (U_n) est décroissante.

b/ Pour $x \in [-1, 0]$, $\frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}} \geq 0$; $-1 < 0.$

doù $\int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx \geq 0.$

d'où $U_n \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(U_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc elle est convergente.

3/a/ $U_{n+2} = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

On pose

$u(x) = (x+1)^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)(x+1)^n$

$v'(x) = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}$, $v(x) = \sqrt{x^2+2x+2}.$

$U_{n+2} = \left[(x+1)^{n+1} \cdot \sqrt{x^2+2x+2}\right]_{-1}^{0} - (n+1)\int (x+1)^n \sqrt{x^2+2x+2}$

$U_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)\int_{-1}^{0} (x+1)^n \frac{(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

$U_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1) \cdot \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx - (n+1) \cdot \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{\ }}$

$U_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1) \cdot U_{n+2} - (n+1) \cdot U_n$

$U_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \cdot U_n.$

b/ $U_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} U_n$, pour $n \in$

$\lim_{n \to +\infty} U_{n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} U_n$

$\ell = 0 - \ell$

$\ell = 0.$

Ex 2

1/ $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$

$V = \pi \cdot \int_0^2 f^2(x)$

$= \pi \cdot \int_0^2 4 \cdot (2x - x^2) dx$

$= 4\pi \cdot \left[\frac{2}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$= 4\pi\left(4 - \frac{8}{3}\right)$

$= \frac{16\pi}{3}$. u.v.

2/ $F : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto F(x) = \int_{0}^{1+\sin x} f(t)\, dt.$

$x \mapsto 1 + \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$. [0,

a/ $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et f continue sur

donc F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

comme étant une primitive de f sur

b/ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$F'(x) = (1+\sin x)' \cdot f(1+\sin x).$

$= \cos x \cdot 2 \cdot \sqrt{2 + 2\sin x - \sin^2 x - 1}$

$= \cos x \cdot 2 \cdot \cos x.$

$F'(x) = 2\cos^2 x.$

b/ $F'(x) = 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$= 1 + \cos 2x.$

$F(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x +$

$-0 = 0\ -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times 0 +$

$F(x) = x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c/ $\mathcal{A} = 2\int_0^2 f(x)\,dx$

$= \cancel{2\int}$

$= 2\int_0^{1+\sin\pi/2} f(t)\,dt$

$= 2 \cdot F(\pi/2)$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi)\right)$

$= 2\pi$ u.a.

Ex 3

Soit $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \sqrt{t(1-t)}$

1/a/ La fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est positive et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

" " $x \mapsto \sqrt{t(1-t)}$ continue sur $[0,1]$.

pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^2 x \in [0,1]$.

D'où F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq 0$ et $\cos x \geq 0$.

$F'(x) = (\sin^2 x)' \cdot \sqrt{\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)}$

$= 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \cos x$.

$= \frac{1}{2}\sin^2(2x)$.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos(4x)}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}(1 - \cos(4x))$.

b/ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$F(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

or $F(0) = 0$

$\Rightarrow c = 0$.

$F(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right)$.

2/ $V = \pi \int_0^{1/2} \sqrt{x(1-x)}\,dx$

$= \pi \cdot \int_0^{(\sin\pi/4)^2} \sqrt{x(1-x)}\,dx$

$= F(\pi/4)$

$= \frac{1}{4}\left(\pi/4 - \frac{1}{4}\sin\ldots\right.$

Ex 4

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = \tan x$.

I/1/ La fonction $x \mapsto \tan x$ dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$.

d'où g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right.$

Elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1, +\infty$

2/ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \geq 1 > 0$.

donc h est dérivable sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$

et pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \cancel{\ldots}$

On pose $\begin{cases} h(x) = y \\ y \in \mathbb{R}_+ \\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \iff g(y) = x$

$x = \tan y$.

donc $x^2 + 1 = \tan^2 y + 1 = g'(y) = g'(h($

$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{x^2+1}$

II/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)}{\sin x} \\ f_n(0) = 2(n+1)\ldots \end{cases}$

(U_n) la suite / $U_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$

1) $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2(n+1)x) \cdot 2(n+1)x}{2(n+1)x(\sin x) \times x}$

$= \cancel{\ldots}\ 2(n+1) = f_n(0)$

donc f_n est continue à droite en 0.

or la fonction $x \mapsto 2(n+1)x$ dérivable sur $]$

" $x \mapsto \sin x$ " "$]$

donc f_n dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $\sin$

D'où f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d'où on peut intégrer f_n de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

ainsi U_n est bien définie.

2/a/ Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - U_n =$$

$$\int_0^{\pi/2} f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} f_{n+1}(x) - f_n(x)\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2(n+2)x) - \sin(2(n+1)x)}{\sin x}\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2.\ \sin\left(\frac{(2n+4)x - (2n+2)x}{2}\right).\cos(\cdots)}{\sin x}\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} 2\frac{\sin x .\cos\left(\frac{(2n+4)x+(2n+2)x}{2}\right)}{\sin x}\,dx =$$

$$2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+3)x)\,dx =$$

$$2\left[\frac{1}{2n+3}.\sin((2n+3)x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$2.\ \frac{\sin((2n+3)\pi/2)}{2n+3} =$$

$$2.\ \frac{\sin(n\pi + 3\pi/2)}{2n+3}.$$

Or si n est pair, $(n+1)$ est impair:

$$\sin\left(n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$$

Si n est impair, alors $n+1$ est pair:

$$\sin\left(n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left((n-1)\pi + \frac{3\pi}{2} - \pi\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = (-1)^{n+1}$$

Par suite $U_{n+1} - U_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.

$$* \ U_0 = \int_0^{\pi/2} f_0(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sin x}\,d\ldots$$

$$* \ U_1 - U_0 = 2.\frac{-1}{2\times 0+3}$$

$$U_1 = \frac{-2}{3} + U_0 = \frac{-2}{3} + 2 = \frac{4}{3}.$$

$$* \ U_2 - U_1 = 2.\frac{1}{2+3}$$

$$U_2 = \frac{2}{5} + U_1 = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{26}{15}$$

b/ pour $n=0$,

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = 2 \\ 2.\sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k}{2\times k+3} = 2.\frac{1}{1} = 2 \end{array}\right\} U_0 = 2.\sum_{k}$$

La propriété est vraie à l'ordre de $n=0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $U_n = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k\ldots}$

Montrons que $U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - U_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

$$U_{n+1} = 2.\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + 2.\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= 2.\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right]$$

$$= 2.\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Conclusion, par principe de raisonnement récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = 2.\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

3/ a/ $\int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1.$

$k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^{2k}\,dx = \left[\frac{1}{2k+1}.x^{2k+1}\right]_0^1$

$$= \frac{1^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}.$$

b/ Pour $n=0$, $U_0 = 2$

$$2\int_0^1 \frac{1+(-1)^0.x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 dx = 2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, Supposons que:

$$U_n = \int_0^1 1 + (-1)^n.x^{2n+2}$$