Analyse
Intégrales, suites, ln et exp

Exercice 1. * | 40 mn | 6 points

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \ln\left(1 + \tan x\right)$.

1. (a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

   (b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$, on note g la fonction réciproque de f.

   (c) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis vérifier que pour tout réel $x \geq 0$,
$$g'(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2}.$$

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4} - x} f(t)dt$.

   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis calculer $\varphi'(x)$ à l'aide de $f(x)$ où x est un réel de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   (b) Déduire que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\varphi(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)dt - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\ln 2$

   (c) Déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt$.

3. On donne dans la figure jointe les courbes (C) et (C') représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

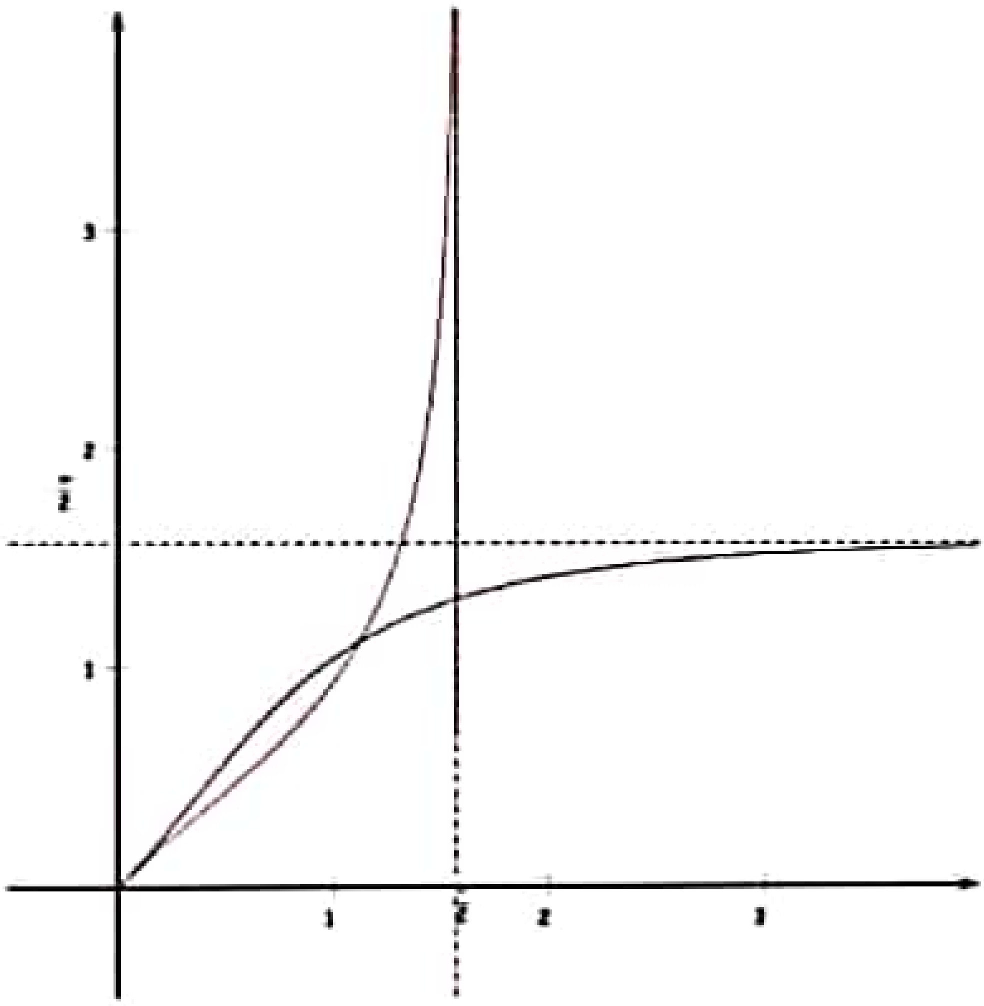
   Pour tout réel m de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note :

   — $D(a)$, la partie du plan limitée par (C) et les axes du repère et la droite d'équation $x = a$.
   — $\delta(a)$, la partie du plan limitée par (C') et les droites d'équation $x = 0$, $x = f(a)$ et $y = a$.

   (a) Hachurer $D(a)$ et $\delta(a)$ pour une valeur arbitraire de a.

   (b) On admettra que $D(a)$ et $\delta(a)$ sont isométriques, montrer que :
$$af(a) - \int_0^a f(t)dt = \int_0^{f(a)} g(t)dt.$$

   (c) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{1 + (e^x - 1)^2}dx$.



Exercice 2. | • | 25 mn | 4 points

n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$.
Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
2. Etudier les variations de f_n.
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0, 1[$.
4. (a) Vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n$.
   (b) Montrer que la suite (α_n) est croissante puis qu'elle est convergente.
5. On note ℓ la limite de la suite (α_n).
   (a) Montrer que $0 < \ell \leq 1$.
   (b) Montrer que : $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\alpha_n \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{e}{4}\right)$
   (c) Déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3. | * | 20 mn | 4 points

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

2. (a) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{n+t}$.

   (b) Déduire que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ puis que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.
   Démontrer que (U_n) est décroissante.

4. Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$. Démontrer que (V_n) est croissante.

5. Montrer que (U_n) et (V_n) convergent vers une limite commune γ puis donner une valeur approchée à 10^{-1} près de γ.

Exercice 4. | * | 25 mn | 4 points

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ et $U_0 = \ln 2$.

1. Montrer que (U_n) et décroissante et positive puis qu'elle est est convergente.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $U_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq U_n$.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln 2 - (-1)^n U_n = S_n$.

   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\ln 2 - S_{2n}\right)$.