Intégrales

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{I}_n)$ est décroissante dont tous les termes sont positifs.

2. a. Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{I}_n + \mathcal{I}_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq \mathcal{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   d. En déduire que la suite $(\mathcal{I}_n)$ converge vers 0.

   e. Calculer $f(n) = \mathcal{I}_{n+4} - \mathcal{I}_n$ en fonction de n.

3. a. Calculer $\mathcal{I}_2$.

   b. Calculer $\sum_{p=1}^{n} f(4p-2)$ en fonction de $\mathcal{I}_2$ et de $\mathcal{I}_{4n+2}$ où $k \in \mathbb{N}^*$

   c. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dots - \dfrac{1}{4n-1} + \dfrac{1}{4n+1}\right)$.

Exercice 2

On considère les deux fonctions fonctions F et f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \text{ et } f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. a. i. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis expliciter $F'(x)$ pour tout réel x.

   ii. Montrer que F est impaire.

   b. i. En justifiant que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{2}{(1+t)^2}$. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq 2$.

   ii. En déduire que la fonction F admet une limite ℓ en $+\infty$ et que $\ell \leq 2$.

   c. Montrer que $\forall x \geq 0$, $F(x) \geq \int_0^x \dfrac{2}{(1+t)^2}\,dt$. En déduire que $\ell \geq 1$.

   d. Démontrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution réelle.

   e. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   i. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $G'(x)$.

   ii. En déduire que G est une fonction constante à préciser.

   iii. Montrer que $\ell = 2F(1)$.

Exercice 3

① Soit (I_n) la suite définie par : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et $\forall n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que (I_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

② a) i. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}(1-x)$.

ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

iii. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 4

On considère la suite $\mathcal{W}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mathcal{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

① a) Calculer $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$.

b) Montrer que la suite $(\mathcal{W}_n)$ est à termes stictement positifs et qu'elle est décroissante.

c) En déduire que $(\mathcal{W}_n)$ converge. On note ℓ sa limite.

② Soit α un réel quelconque de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $V_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sin^n x\,dx$ et $W_n = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

a) Montrer que pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}-\alpha\right]$, on a : $0 \leq \sin^n x \leq \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $W_n \leq \alpha$.

d) En déduire que $0 \leq \ell \leq \alpha$ et que $\ell = 0$.

Exercice 5

On considère les deux suites $(\mathcal{J}_n)$ et $(\mathcal{K}_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{J}_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \text{ et } \mathcal{K}_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt.$$

① Calculer $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{K}_1$.

② a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $\mathcal{J}_{n+1} = \mathcal{J}_n - \mathcal{K}_n$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\mathcal{K}_n = \frac{1}{2(n+1)}\mathcal{J}_{n+1}.$$

c) En déduire que pour tout $\in \mathbb{N}^*$, ona : $\mathcal{J}_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\mathcal{J}_n$.

③ a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}^*$, ona : $\mathcal{J}_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

b) Ecrire $\mathcal{K}_n$ en fonction de n.

④ Donner les valeurs de $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{K}_2$ et $\mathcal{K}_3$.