oit $f$ la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

t $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( unité : $1\ cm$ )

) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

) a) Vérifier que pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ , $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

c) Montrer que pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ , $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

d) Montrer que $(C)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de directio symptotique la droite $(\Delta)$ d'équation $y=x$

)a) Montrer que pour tout $x$ de $]0,1]$ : $(x-1)+\ln x\leq 0$

et que pour tout $x$ de $[1,+\infty[$ : $(x-1)+\ln x\geq 0$

b) Montrer que pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ , $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$

) a) Montrer que $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout $x$ de $]0,+\infty[$

b) En déduire que $(C)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées .

)a) Montrer que pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ , $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position elative de $(C)$ et $(\Delta)$

b) Construire $(\Delta)$ et $(C)$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

)a) Montrer que la fonction $H:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $h:x\mapsto\ln x$ su $]0,+\infty[$

b) A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

c) Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine plan limité par $(C)$ et $(\Delta)$ et les droites d'équations $x=1$ e $x=e$

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $IR^*$ par : $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( unité : 1 $cm$ )

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la courbe $(C)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout $x$ de $IR^*$

b) Vérifier que pour tout $x$ de $IR$ , $x^2-2x+4>0$

c) Montrer que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[2,+\infty[$

d) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $IR^*$

4) Construire la courbe $(C)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) a) Vérifier que la fonction $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonctio
$h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$

b) Vérifier que $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout $x$ de $IR^*$

c) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}dx$

d) Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine plan limité par $(C)$ , l'axe des abscisses et les droite d'équations $x=2$ et $x=4$

- Soit $g$ la fonction numérique définie sur $I\!R$ par :

$$g(x) = 1-(x+1)^2 e^x$$

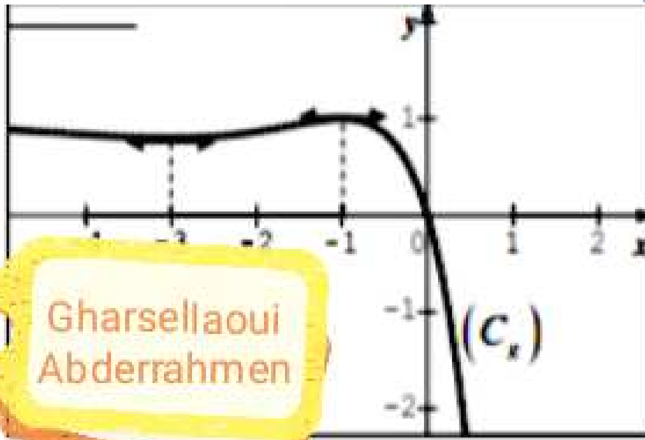
1) Vérifier que $g(0)=0$

2) A partir de la courbe représentative $(C_g)$ de la la fonction $g$ ( voir figure ci-contre )

Montrer que :

$g(x) \geq 0$ pour tout $x$ appartenant à $]-\infty, 0]$

et que $g(x) \leq 0$ pour tout $x$ appartenant à $[0, +\infty[$






I- On considère la fonction numérique $f$ définie sur $I\!R$ par : $f(x) = x+1-(x^2+1)e^x$

Soit $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ( unité : $2\ cm$)

1) a) Vérifier que $f(x) = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout $x$ appartenant à $I\!R$ puis en déduire

que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)-(x+1)]$ et en déduire que la droite $(D)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$

c) Montrer que la courbe $(C_f)$ est en dessous de la droite $(D)$

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ( on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ )

b) Montrer que la courbe $(C_f)$ admet , au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on déterminera la direction.

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x$ appartenant à $I\!R$

b) Montrer que la fonction $f$ est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $I\!R$

c) Montrer que la courbe $(C_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $-3$ et $-1$

4) Construire, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite $(D)$ et la courbe $(C_f)$

( On prendra $f(-3) \approx -2{,}5$ et $f(-1) \approx -0{,}75$ )

5) a) Vérifier que $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $I\!R$

puis montrer que $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e}-1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$

c) Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C_f)$, la droite (

l'axe des ordonnées

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$

Soit $(C_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité:1c

1)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b)Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à la courbe $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$



2)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3)a)Montrer que $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ pour tout nombre réel $x$

b) Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ ( Remarquer que $f'(0)=0$ )

c) Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha$ de l'intervalle $]1\,,\ln 4[$ tel que $f(\alpha)=0$

4)a)Montrer que la courbe $(C_f)$ est située au dessus de la droite $(D)$ sur l'intervalle $]\ln 4,+\infty[$ et en dessous de la droite $(D)$ sur l'intervalle $]-\infty,\ln 4[$

b) Montrer que la courbe $(C_f)$ admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0\,,-5)$

c)Construire la droite $(D)$ et la courbe $(C_f)$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

( on prendra $\ln 4\approx 1{,}4$ et $\alpha\approx 1{,}3$ )

5)a) Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\frac{9}{2}$

b) Calculer , en $cm^{2}$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C_f)$, la droite $(D)$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 4$

I-Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x}-1+2\ln x$

On considère ci-contre le tableau de variations de la fonction $g$ sur $]0,+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(1)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



1) Calculer $g(1)$

2) En déduire à partir du tableau que $g(x)>0$ pour tout $x$ appartenant à $]0,+\infty[$

II-On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( unité : $2\ cm$ )

) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

2)a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ( pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante $f(x)=x\left[\dfrac{3}{x}-3+2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right]$ )

b- Montrer que la courbe $(C)$ admet , au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées .

3) a-Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout $x$ appartenant à $]0,+\infty[$

b- En déduire que $f$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de $f$ sur $]0,+\infty[$

4)a- Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(C)$

b-Montrer que $y=x-1$ est une équation cartésienne de la tangente $(T)$ à la courbe $(C)$ au point $I$

c-Construire , dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite $(T)$ et la courbe $(C)$

5) a-Montrer que : $\displaystyle\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$

b - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln x\,dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$

c- Calculer, en $cm^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$