Lycée pilote de Tunis	**Isométries planes 2**	**Terminales Maths**
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

IJK est un triangle rectangle isocèle en I et direct avec $IK = 1$. O et H sont les milieux respectifs de $[JK]$ et $[IJ]$.

R et R' les rotations de centres respectifs O et I et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Montrer que $R' = S_{(OI)} \circ S_{(IJ)}$ et que $R = S_{(OH)} \circ S_{(OI)}$.

   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R \circ R'$.

2. a) Montrer que $S_{(IK)} \circ R \circ R'$ est une symétrie glissante.

   b) Montrer que $f = S_{(IK)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$ est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

3. Considérons le repère orthonormé $\left(I, \frac{1}{IJ}\overrightarrow{IJ}, \frac{1}{IK}\overrightarrow{IK}\right)$ et g l'application plane qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \end{cases}$.

   a) Montrer que g est une isométrie.

   b) Donner les images par g des points H, O et J.

   c) Déduire que $f = g$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ .Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -e^{2i\theta}\bar{z} + 4e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est une isométrie.
2. a) Montrer que $f(M) = M \Leftrightarrow Ré\left(e^{i\theta}\bar{z}\right) = 2$.

   b) En déduire que f est une symétrie orthogonale d'axe Δ_θ que l'on précisera.

   c) Montrer que Δ_θ reste tangente au cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 2 quand θ varie.

Exercice 3

P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et m est un paramètre complexe.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(i-1)z^2 + (1-i)(m-i)z - 2(m-i)^2 = 0$.

   b) Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

   Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points M_1 et M_2 lorsque $|m|$ varie et $arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2. Soit l'application plane f qui a tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = (1+im)\overline{z} + (1-i)(m-i)$.

   Montrer que f est une isométrie de P si et seulement si $m = i + e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi, \pi]$.

3. On prend $m = i + e^{i\theta}$.

   Soit $M(z)$ un point de P et soit $M'' = f \circ f(M)$.

   a) Montrer que l'affixe z'' de M'' est $z' = z + (1-i)\left(e^{i\theta} - i\right)$

   b) En déduire que si $\theta \neq 0$ alors f n'admet aucun point invariant.

4. On prend $m = 1 + i$.

   Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f.

Exercice4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit f l'application plane qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$.

1. a) Montrer que f est isométrie du plan.
   b) déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   c) En déduire qu'il existe une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ uniques tel que :

   $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

2. a) Déterminer les expressions analytiques de $f \circ f$.

   b) Caractériser l'application $f \circ f$ et en déduire le vecteur $\vec{u}$.

   c) Caractériser l'application $t_{-\vec{u}} \circ f$ et en déduire la droite (D).

Exercice1

1. a) $(IJ)\cap(OI)=\{I\}$ et $2\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IO}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $R'=S_{(OI)}\circ S_{(IJ)}$

aussi $(OH)\cap(OI)=\{O\}$ et $2\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OH}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $R=S_{(OH)}\circ S_{(OI)}$.

b) $R\circ R'=S_{(OH)}\circ S_{(OI)}\circ S_{(OI)}\circ S_{(IJ)}=S_{(OH)}\circ S_{(IJ)}$ car $S_{(OI)}\circ S_{(OI)}=id_P$

Or $(OH)\cap(IJ)=\{H\}$ et $(OH)\perp(IJ)$ donc $S_{(OH)}\circ S_{(IJ)}=S_H$. Ainsi $R\circ R'=S_H$.

2. a) $S_{(IK)}\circ R\circ R'=S_{(IK)}\circ S_{(OH)}\circ S_{(IJ)}$. Or les droites (IK) et (OH) sont parallèles et $\overrightarrow{HI}$ est un vecteur normal à ces deux droites donc $S_{(IK)}\circ S_{(OH)}=t_{2\overrightarrow{HI}}=t_{\overrightarrow{JI}}$

On a donc $S_{(IK)}\circ R\circ R'$ $S_{(IK)}\circ R\circ R'=t_{\overrightarrow{JI}}\circ S_{(IJ)}$ et comme $\overrightarrow{JI}$ est un vecteur directeur de (IJ) alors $S_{(IK)}\circ R\circ R'$ est une symétrie glissante.

b) On a $(IK)=t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{JI}}\left\langle(OH)\right\rangle$ donc $t_{\overrightarrow{JI}}=S_{(IK)}\circ S_{(OH)}$ et par suite

$f=S_{(IK)}\circ t_{\overrightarrow{JI}}=S_{(IK)}\circ S_{(IK)}\circ S_{(OH)}=S_{(OH)}$ donc f est la symétrie orthogonale d'axe (OH).

3. a) Soit $M(x_1,y_1)$ et $N(x_2,y_2)$ deux points du plan d'images respectifs M' et N' par g.
On a
$(M'N')^2=\left(x_2'-x_1'\right)^2+\left(y_2'-y_1'\right)^2=(1-x_2-1+x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=MN^2$ On a donc $M'N'=MN$ et g est une isométrie.

b) $H\left(\frac{1}{2},0\right)$ son image est lui-même

$O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ son image est lui-même

$J(1,0)$ son image est I.

c) g fixe les points O et H et $g\neq id_P$ car $g(J)=I\neq J$ donc g est la symétrie orthogonale d'axe (OH) finalement $f=g$.

Exercice 2

Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 et on désigne par z_1' et z_2' les affixes de leurs images par f.

On a : $M'N'=\left|z_2'-z_1'\right|=\left|-e^{2i\theta}\overline{z_2}+4e^{i\theta}+e^{2i\theta}\overline{z_2}-4e^{i\theta}\right|=\left|\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)e^{2i\theta}\right|=\left|\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)\right|=\left|z_1-z_2\right|=MN$.

Ainsi $M'N'=MN$ et donc f est une isométrie.

$f(M)=M\Leftrightarrow z=-e^{2i\theta}\overline{z}+4e^{i\theta}\Leftrightarrow ze^{i(-\theta)}=-e^{i\theta}\overline{z}+4$
$\Leftrightarrow ze^{i(-\theta)}+e^{i\theta}\overline{z}=4\Leftrightarrow\overline{e^{i\theta}\overline{z}}+e^{i\theta}\overline{z}=4\Leftrightarrow 2Re\left(e^{i\theta}\overline{z}\right)=4\Leftrightarrow Re\left(e^{i\theta}\overline{z}\right)=2$.

Conclusion : $f(M)=M\Leftrightarrow Ré(e^{i\theta}\overline{z})=2$.

b) Posons $z = x + iy$, x et y réels $e^{i\theta}\overline{z} = (cos\theta + isin\theta)(x - iy) = xcos\theta + ysin\theta + i(xsin\theta - ycos\theta)$

Donc $Re\left(e^{i\theta}\overline{z}\right) = 2 \Leftrightarrow xcos\theta + ysin\theta = 2$.

Or $xcos\theta + ysin\theta = 2$ est l'équation d'une droite étant donnée que $cos\theta$ et $sin\theta$ ne s'annulent jamais en même temps.

Conclusion l'ensemble des points invariants par f est la droite Δ_θ d'équation cartésienne : $xcos\theta + ysin\theta = 2$. f est alors une symétrie orthogonale d'axe Δ_θ.

c) Pour montrer que Δ_θ reste tangente au cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 2 quand θ varie il suffit que la distance de O a la droite Δ_θ soit égale au rayon du cercle.

$d(O, \Delta_\theta) = \dfrac{|0 \times cos\theta + 0 \times sin\theta - 2|}{\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}} = 2$. **On rappelle que la distance d'un point I a une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est** $d(I, D) = \dfrac{|a \times x_I + b \times y_I + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 3

1. a) Résolution de l'équation (E) : $\Delta = -2i(m-i)^2 + 8(i-1)(m-i)^2 = (m-i)^2(6i-8) = (m-i)^2(1+3i)^2$

   $\Rightarrow \delta = (m-i)(1+3i)$.

   Les solutions sont donc :

   $$z_1 = \frac{-(1-i)(m-i) - (m-i)(1+3i)}{2(i-1)} = \frac{(m-i)(-2-2i)}{2(i-1)} = \frac{(m-i)(1+i)}{(1-i)} = \frac{(m-i)(1+i)^2}{2}$$

   $= i(m-i) = 1 + im$.

   $$z_2 = \frac{-(1-i)(m-i) + (m-i)(1+3i)}{2(i-1)} = \frac{2i(m-i)}{(i-1)} = m(1-i) - (1+i)$$

   b) Posons $m = r\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec r réel strictement positif.

   $$z_1 = 1 + im = 1 + ir\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - r\frac{\sqrt{2}}{2} + ir\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Si $z_1 = x + iy$ avec x et y réels alors l'égalité $z_1 = 1 - r\frac{\sqrt{2}}{2} + ir\frac{\sqrt{2}}{2}$ est équivalente à $\begin{cases} x = 1 - r\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = r\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; r \succ 0 \end{cases}$

   ce qui est équivaut à $y = 1 - x, \quad y \succ 0$.

   L'ensemble des points M_1 est la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = 1 - x \\ y \succ 0 \end{cases}$.

   Pour le point M_2 : $z_2 = m - im - 1 - i = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - ir\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 - i$ et après simplification

   $z_2 = m - im - 1 - i = 1 + r\sqrt{2} - i$.

Si $z_1 = x+iy$ avec x et y réels alors l'égalité $z_2 = 1+r\sqrt{2}-i$ se traduit par $\begin{cases} x = 1+r\sqrt{2} \\ y=-1 \quad ; r \succ 0 \end{cases}$. L'ensemble des points M_2 est la demi-droite d'équation : $y=-1, \quad x \succ 1$.

2. Soient M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par f.

   f est une isométrie de P si et seulement $M'N' = MN$

   $M'N' = \left|(1+im)\overline{z_N} - (1+im)\overline{z_M}\right| = \left|(1+im)\left(\overline{z_N} - \overline{z_M}\right)\right|$

   $= \left|(1+im)\left(\overline{z_N - z_M}\right)\right| = |1+im||z_N - z_M| = MN \times |1+im|$. Ainsi f est une isométrie de P si et seulement

   $|1+im| = 1 \Leftrightarrow 1+im = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow im = -1+e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = i - ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

   $\Leftrightarrow m = i + e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}, \alpha - \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

   Conclusion : f est une isométrie de P si et seulement $m = i + e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi, \pi]$. (θ est en fait la mesure principale de $\alpha - \frac{\pi}{2}$).

3. $m = i + e^{i\theta}$, $z' = \left(1+i\left(i+e^{i\theta}\right)\right)\overline{z} + (1-i)e^{i\theta} = ie^{i\theta}\,\overline{z} + (1-i)e^{i\theta}$.

   et on a : $M'' = f \circ f(M)$

   Par l'application f : $M \mapsto M_1$ avec $M_1\left(z_1 = ie^{i\theta}\,\overline{z} + (1-i)e^{i\theta}\right)$ et M_1 a pour image par f le point M''

   d'affixe $ie^{i\theta}\,\overline{z_1} + (1-i)e^{i\theta} \Rightarrow z'' = ie^{i\theta}\,\overline{\left(ie^{i\theta}\,\overline{z} + (1-i)e^{i\theta}\right)} + (1-i)e^{i\theta}$

   $\Rightarrow z'' = ie^{i\theta}\left(-ie^{i\theta}z + (1+i)e^{-i\theta}\right) + (1-i)e^{i\theta} \Rightarrow z'' = z + i - 1 + (1-i)e^{i\theta} = z + (1-i)\left(e^{i\theta} - 1\right)$.

   b) Si $\theta \neq 0$ alors $e^{i\theta} - 1 \neq 0$ et par suite f est une translation de vecteur non nul et donc f n'admet aucun point invariant.

4. $m = 1+i$ donc $z' = \left(1+i(1+i)\right)\overline{z} + (1-i) = i\,\overline{z} + 1 - i$

   M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow i\,\overline{z} + 1 - i = z \; i(x-iy) + 1 - i = x+iy$ avec $z = x+iy$,

   x et y réels $\Leftrightarrow y + 1 + i(x-1) = x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = x \\ x-1 = y \end{cases} \Leftrightarrow y = x-1$.

   l'ensemble des points invariants par f est la droite $\Delta : y = x-1$ et par suite comme f est une isométrie alors $f = S_\Delta$.

Exercice4

1. Posons $z = x+iy$, x, y réels et $z' = x'+iy'$, x', y' réels.

   $z' = x'+iy' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 + i\left(-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2\right) \frac{3}{5}(x-iy) - \frac{4}{5}i(x-iy) + 2 + 2i = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2 + 2i$

   $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2 + 2i$.

   Montrons que f est une isométrie du plan.

Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 et on désigne par z_1' et z_2' les affixes de leurs images par f.

$$M'N' = \left|z_2' - z_1'\right| = \left|\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z_2}+2+2i-\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z_1}+2+2i\right)\right|$$

$= \left|\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\left(\overline{z_2}-\overline{z_1}\right)\right| = \left|\overline{z_2}-\overline{z_1}\right| = \left|z_2-z_1\right|$ On a donc $M'N' = MN$ et f est une isométrie plane.

b) Un point M est invariant par f signifie $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2 \\ y = -\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0 \\ -\frac{4}{5}x-\frac{8}{5}y+2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y+10=0 \\ -4x-8y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y=-5 \\ -x-2y=-\frac{5}{2} \end{cases}$. Ce système est impossible dons f n'admet pas de point invariant.

c) f est une isométrie différente d'une translation sans points fixes donc f est une symétrie glissante. Il existe donc une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ directeur de (D) uniques tel que : $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

2. a) $M_1 = f(M) \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2+2i$ et $M' = f(M_1) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z_1}+2+2i$. Ainsi

$$M' = f\circ f(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2+2i\right)}+2+2i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\left(\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)z+2-2i\right)+2+2i \Leftrightarrow z' = z+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)(2-2i)+2+2i \Leftrightarrow z' = z-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}i$$

b) on reconnait l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}i$.

c) $M_1 = f(M) \Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2+2i$ et $M' = t_{-\vec{u}}(M_1) \Leftrightarrow z' = z_1+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}i$.

Ainsi $M' = t_{-\vec{u}}\circ f(M) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2+2i+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}i \Leftrightarrow z' = \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+\frac{14}{5}+\frac{14}{5}i$ c'est l'écriture complexe de $t_{-\vec{u}}\circ f$.

Mais $t_{-\vec{u}}\circ f = S_D$ et donc la droite (D) est tout simplement l'ensemble des points invariants par S_D.

Chercher le et conclure.