Lycée pilote de bizerte	ISOMRTRIE	CLASSE :	Prof : M.Ben ali

EXERCICE N°1:

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle tel que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ et soit O le milieu de [AC]. On désigne par I le milieu de [OB] et par D le symétrique de O par rapport à (BC). Soit J le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(O) = D.

   b) Montrer que f est la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

   c) Soit K = f(I). Montrer que K est le milieu de [BD] et en déduire que les points O, J et K sont alignés.

2. On pose $g = S_{(BO)}\circ S_{(AB)}\circ f^{-1}$.

   a) Déterminer g(B) et g(C).

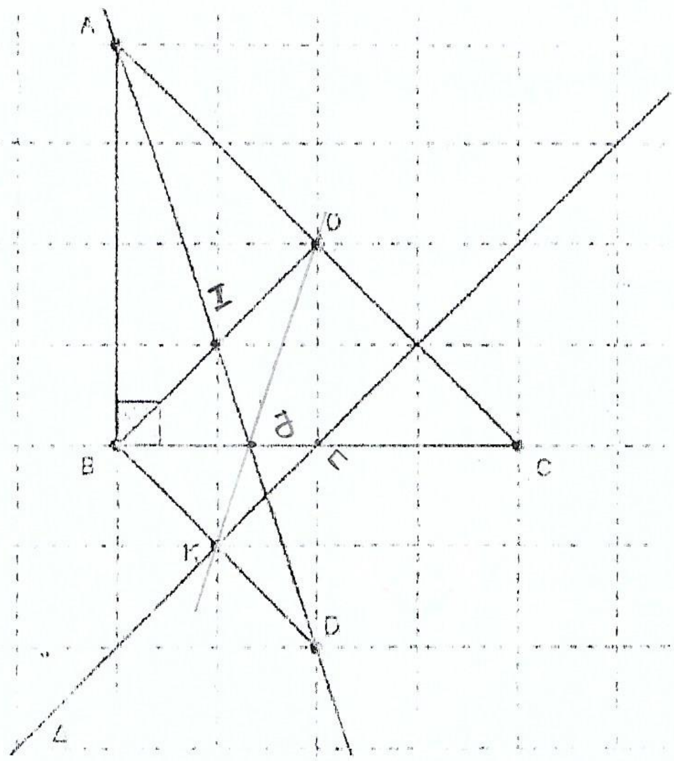
   b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)}\circ S_{(BO)}$.

3. On pose $h = S_{(OD)}\circ f^{-1}$. On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [BD].

   Montrer que h est la symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $h(M) = f^{-1}(M)$.

5. Caractériser l'application $S_{(BO)}\circ h$.



EXERCICE N°2.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle g l'application du plan (P) dans lui-même qui à tout point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z', définie par : $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

1. a) Montrer que g ne fixe aucun point.

   b) Pour tous points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, on pose $M_1' = g(M_1)$ et $M_2' = g(M_2)$

   Montrer que $z_2' - z_1' = i\overline{(z_2 - z_1)}$. En déduire que g est une isométrie.

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = -1$ et $z_C = 1 + 2i$

   a) Déterminer les images des points A et B par g. En déduire que g n'est pas une translation.

   b) En déduire la nature de g puis caractériser g.

EXERCICE N°3:

Dans le plan orienté, on considère deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ') et quatre points distincts A, B, C et D tels que : A et C sont sur la droite (Δ), B et D sont sur (Δ'), AC = BD et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On suppose que les segments [AC] et [BD] n'ont pas même milieu

Voir figure page 3

1. a) Justifier qu'il existe une rotation R_1 qui envoie A sur B et C sur D dont on précisera la mesure principale θ_1 de son angle.

   b) Construire Ω_1 le centre de R_1.

2. Montrer qu'il existe une rotation R_2 qui envoie D sur A et B sur C dont on précisera la mesure principale θ_2 de son angle et construire son centre Ω_2.

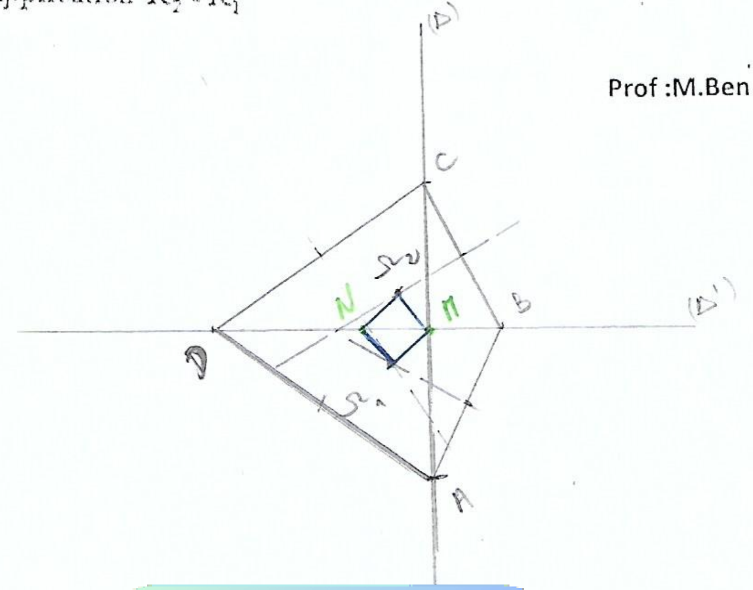
3. On désigne par M le milieu de [AC] et N celui de [BD]

   a) Montrer que $R_1(M) = N$ et $R_2(N) = M$.

   b) En déduire la nature du quadrilatère $\Omega_1 M \Omega_2 N$.

4. Caractériser l'application $R_2 \circ R_1$

Prof :M.Ben Ali



Isométrie - Complexe.

Ex 1

1) a/ On a $S_{(BC)}(O) = K$ ... $\left.\begin{matrix} S_{(BC)}(\mathcal{C}) = K \\ S_{(BC)}(O) = D \end{matrix}\right\} OC = KD$. (1)

Comme ABC est isocèle rectangle.

alors $OA = OB = OC$ (2)

D'ou (1) et (2) donnent

$\left.\begin{matrix} OA = CD. \\ \text{et } OA \neq 0 \end{matrix}\right\}$

Il existe un unique déplacement f/

$f(A) = C$

$f(O) = D$.

b/ ~~On a f...~~ Une mesure de

Soit α l'angle de f.

$\alpha \equiv (\widehat{\vec{AO}, \vec{CD}})\ [2\pi]$

$\equiv (\widehat{\vec{OC}, \vec{CD}})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + (\widehat{\vec{CO}, \vec{CD}})\ [2\pi]$

Or (BC) bissectrice de $(\widehat{\vec{CO}, \vec{CD}})$

$\equiv \pi + 2.\ (\widehat{\vec{CO}, \vec{CB}})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + 2.\ \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

$\equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]\quad (\neq 2k\pi)$.

D'où f est la rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

Soit Ω son centre.

On a $f(A) = C$ ssi $\Omega \in \text{med}[AC] = (OB)$

$f(O) = D$ ssi $\Omega \in \text{med}[OD] = (BC)$

d'où $\{\Omega\} \in (OB) \cap (BC)$

ssi $\Omega = B$.

f de centre B et ...

c/ On a $I = B * O$

sig $f(I) = f(B) * f(O)$

sig $K = B * D$.

Think of (BC) mediatrice donc la mediane dans BDO isocèle

Comme $I = B * O$ alors (DI) porte la mediane issue de D dans B...

$K = B * D$ alors (OK) porte la mediane issue de O dans BDO

D'où $\{J\} = (DI) \cap (OK)$ est le centre de gravité de BDO.

D'où $J \in (OK)$.

J, O et K sont alignés.

2) $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$.

a/ $g(B) = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}(B)$

$= S_{(BO)} \circ S_{(AB)}(B)$

$= B$.

$g(C) = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}(C)$

$= S_{(BO)} \circ S_{(AB)}(A)$

$= S_{(BO)}(A)$

$= C$.

b/ g est la composée de 2 antideplacements et d'un deplacement, donc g est deplacement qui fixe 2 points.

D'où $g = Id_P$.

On a $Id_P = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$

ssi $S_{(BO)} = S_{(AB)} \circ f^{-1}$

$S_{(AB)} \circ S_{(BO)} = f^{-1}$.

3) $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$.

$\Delta = \text{med}[BD]$.

$= S_{(OD)} \circ$ ~~...~~ R

$h = t_{2\vec{BM}} \circ S_{(BO)}$ avec $M = B * C$.

$= t_{\vec{BC}} \circ S_{(BO)}$

$= t_{\vec{BO}} \circ t_{\vec{OC}} \circ S_{(BO)}$

$= t_{\vec{BO}} \circ S_\Delta \circ \cancel{S_{(BO)}} \circ \cancel{S_{(BO)}}$

$= t_{\vec{BO}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{BO}}$

Comme $\vec{BO}$ est un vecteur directeur de Δ alors

4) Soit $M \in P$.

$h(M) = f^{-1}(M)$

ssi $S_{(OD)} \circ f^{-1}(M) = f^{-1}(M)$

Ce passage est faux

ssi $f \circ S_{(OD)}(M) = f(M)$

ssi $f^{-1} \circ f \circ S_{(OD)}(M) = f^{-1} \circ f(M)$

ssi $S_{(OD)}(M) = M$.

ssi $M \in (OD)$.

$f^{-1}(M) \in (OD)$ ssi $M \in f(OD)$

5) $S_{(BO)} \circ h = S_{(BO)} \circ S_\Delta \circ t_{\vec{BO}}$

$= t_{2\vec{KB}} \circ t_{\vec{BO}}$

$= t_{2\vec{KB} + \vec{OC}}$

$= t_{\vec{DB} + \vec{BO}}$

$= t_{\vec{DO}}$.

Ex 2

$g : P \longrightarrow P$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ /

$z' = i\bar{z} + (1+i)$.

1) a/ On pose $M(z)$ un point fixe

ssi $z' = z$., on pose $z = x + iy$ $(x, y) \in$

ssi $i(x - iy) + (1+i) = x + iy$

ssi $ix + y + 1 + i = x + iy$

ssi $(1+y) + i(x+1) = x + iy$

ssi $\begin{cases} 1 + y = x \\ x + 1 = y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 1 + 1 + x = x \\ x + 1 = y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 2 = 0 & \text{impossible} \\ y = x + 1 \end{cases}$

donc il n'y a aucun point fixe par

b/ $z'_2 - z'_1 = i\bar{z_2} + 1 + i - i\bar{z_1} - 1 -$

$z'_2 - z'_1 = i(\bar{z_2} - \bar{z_1})$

$z'_2 - z'_1 = i(\overline{z_2 - z_1})$.

On a pour tous points $M_1(z_1)$ et M_2 d'images respectives $M'_1(z'_1)$ et M'_2

$z'_2 - z'_1 = i(\overline{z_2 - z_1})$

alors $|z'_2 - z'_1| = |i|\,|z_2 - z_1|$

" $M'_2M'_1 = M_2M_1$.

D'où g est une isométrie du plan.

2) $z_A = 1$, $z_B = -1$, $z_C = 1 + 2i$.

a/ On pose $A'(z'_A) = g(A)$

$z'_A = i\bar{z_A} + 1 + i$

$= 1 + 2i = z_C$

$(z'_B) = g(B)$

$z'_B = i\bar{z_B} + 1 + i$

donc $\left.\begin{array}{l} g(A)=C \\ g(B)=A. \\ \text{Or } \vec{AC} \neq \vec{BA} \end{array}\right\}$ g n'est pas une translation.

Car $\begin{cases} Z_{\vec{AC}} = 2i \\ Z_{\vec{BA}} = +2 \end{cases}$

b/ g est une isométrie qui ne fixe aucun point, différente d'une translation.

Donc g est une symétrie glissante.

Soit $\vec{u}$ son vecteur et Δ son axe.

* On a $g\circ g(B)=C$.

ssi $t_{2\vec{u}}(B)=C$.

$2\vec{u} = \vec{BC}$

$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.

* Comme $g(A)=C$.

alors $I(z_I = 1+i) = A*C \in \Delta$.

$g(B)=A$.

alors $J(z_J=0)=O \in \Delta$.

D'où $\Delta = (OI)$.

d'où $g = t_{\frac{1}{2}\vec{BC}} \circ S_{(OI)}$

$= S_{(OI)} \circ t_{\frac{1}{2}\vec{BC}}$.

Ex 3/

1) a/ On ~~pose~~ a $\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ \text{et } AC \neq 0 \end{array}\right\}$

Il existe un unique deplacement R_1 /

$R_1(A)=B$

$R_1(C)=D$.

~~Donc~~ Soit θ_1 une mesure de son angle.

On a $\theta_1 \equiv (\widehat{\vec{AC}, \ldots})$

donc R_1 est une rotation d'angle ...

Soit Ω_1 son centre.

On a $\{\Omega_1\} \in$ med $[AB] \cap$ med $[CD]$

2) On a : $DB = AC$

$\vec{DB} \neq \vec{AC}$.

Donc il existe une unique rotation

telle que : $R_2(D)=A$

$R_2(B)=C$.

Soit θ_2 une mesure de son angle.

$\theta_2 \equiv (\widehat{\vec{DB}, \vec{AC}})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + (\widehat{\vec{BD}, \vec{AC}})\ [2\pi]$

$\equiv \pi - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soit Ω_2 son centre.

$\left.\begin{array}{l} R_2(D)=A \text{ donc } \Omega_2 \in \text{med } [DA] \\ R_2(B)=C \text{ '' } \Omega_2 \in \text{med } [BC] \end{array}\right\}$

D'où $\Omega_2 \in$ med $[DA] \cap$ med $[BC]$.

3) a/ On a $M = A*C$

donc $R_1(M) = R_1(A) * R_1(C)$

$= B * D$

$R_1(M) = N$

De même $N = B*D$.

$R_2(N) = R_2(B) * R_2(D)$

$= C * A$

$= M$.

~~donc~~

b/ $R_1(M)=N$ donc $\begin{cases} \Omega_1 M = \Omega_1 N \\ (\widehat{\vec{\Omega_1 M}, \vec{\Omega_1 N}}) \equiv \frac{\pi}{2} \ldots \end{cases}$

$R_2(N)=M$ donc $\begin{cases} \Omega_2 M = \Omega_2 N \\ (\widehat{\vec{\Omega_2 N}, \vec{\Omega_2 M}}) \equiv \frac{\pi}{2} \ldots \end{cases}$

Donc $\Omega_1 M N$ rectangle isocèle en Ω_1

et $\Omega_2 M N$ ''

... $\Omega_1 M \Omega_2 N$ est ...

4) $R_2 \circ R_1$ est la composée de 2 rotations de m̂ angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $R_2 \circ R_1$ est une rotation d'angle π.

D'où $R_2 \circ R_1$ est une symétrie centrale.

Comme $R_2 \circ R_1(\Pi) = \Pi$

alors $R_2 \circ R_1 = S_{\Pi}$