<u>Exercice1:</u>

Soit ABCD un carré direct de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des segment [AB], [BC], [CD] et [DA].

1°) Justifier l'existence et l'unicité d'un déplacement f qui transforme B en K et L en A.
Déterminer la nature et l'angle de f.

2°) a)Déterminer les images par f des droites (AB) et (AD), en déduire f(A) et f(I).
b)En déduire le centre de F.

3)Caractériser chacune des transformations :

$f = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$, $\quad f = S_{(BC)} \circ S_{(OI)}$, $\quad f = r_{(C,-\frac{\pi}{2})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{2})}$

$f = r_{(A,\frac{\pi}{2})} \circ t_{\overrightarrow{CB}}$ $\quad f = S_{(AC)} \circ r_{(A,\frac{\pi}{2})}$, $\quad f = S_{(IK)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$

<u>Exercice 2 :</u>

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
b) Montrer que $f = R_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(AB)}$.
c) Déterminer alors la nature et les éléments
d) caractéristiques de $R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que $S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = S_{(AO)} \circ S_{(AC)}$.
En déduire que $\varphi = S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} \circ S_{(AC)}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).
b) Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a) Montrer que g fixe le point O.
b) Montrer que g([BC]) = [BC].
c) Déterminer toutes les isométries qui Laissent globalement invariant le triangle ABC.

<u>Exercice 3:</u>

Dans le plan orienté, ABCD est un parallélogramme de sens indirect de centre I et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles directs de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. Voir la figure ci-contre.
On désigne par R_1, R_2, R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4

1)a) Déterminer $R_2 \circ R_1(A)$; $R_3 \circ R_2(B)$ et $R_4 \circ R_3(C)$
b) Montrer que les isométries suivantes $R_2 \circ R_1$, $R_3 \circ R_2$ et $R_4 \circ R_3$ sont égales à une même isométrie f que l'on précisera

2)a) Montrer que $R_3 \circ R_2(O_1) = R_2(O_1)$, déduire alors f(O_1)
b) Montrer que f (O_2)= O_4
c) M que le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est un carré.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.
On désigne par I=A*B et J=A*C .

1°) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et I sur J.
Donner les éléments caractéristiques de f.

2°)Définir l'antidéplacement g qui envoie C en A et A en B.

3°) Caractériser les applications fog et gof.

<u>Exercice 5: (6 points)</u>

ABCD est un losange tel que $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
On désigne par : I = A * B, J = D * C , K = A * D, G = B * J,
Δ_1 est la médiatrice de [AB] et $\Delta_2 = S_B(\Delta_1)$.

Partie I :

1) a) Faire une figure.
b) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f (B) = A.
c) Caractériser f.

2) Caractériser les isométries suivantes :
g = f o S_{Δ_1} et h = f o $t_{\overrightarrow{BC}}$.

3) Soit φ l'isométrie telle que $\varphi = h \circ g$.
a) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(K)$.
b) Déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Partie II :

Soit ψ l'antidéplacement tel que $\psi(J) = B$ et $\psi(\Delta_2) = \Delta_1$.

1) Montrer que ψ est une symétrie glissante.
2) a) Déterminer l'image de la droite (CD) par ψ.
b) Déduire $\psi(C)$.

3) a) Caractériser l'isométrie $S_G \circ \psi$.
b) Déduire alors la forme réduite de ψ.

Exercice 6:

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tels que AC= 2AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. I = A*C.

1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui transforme A en I et B en C.
b) Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centreΩ.

2) Soient R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = \varphi \circ R^{-1}$.
a)Déterminer g (A) puis caractériser l'application g.
b) En déduire que : $\varphi = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$.

3) Soit E= R(I) et F le point tel que AEFI est un carré.
a) Caractériser l'application $\varphi \circ \varphi$
b) Déterminer $(\varphi \circ \varphi)$ (A).
En déduire que : Ω = A* F.

Exercice 7:

Dans le plan orienté, on considère le losange ABCD de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Le cercle de centre B et de rayon AB recoupe la droite (BD) en I.
1)a)Justifier l'existence d'un déplacement unique φ qui envoie A en C et B en D.
b)Caractériser f.
2)a)Donner la nature de $g = r_{(D,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{BD}} \circ r_{(A,-\frac{\pi}{3})}$
b)Déterminer g(D), caractériser alors g
3)Soit $f = r_{(B,-\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{3})}$
a)Donner la nature de f.
b)Caractériser f.
4)Déterminer et caractériser les isométries suivantes :$h = S_{(AI)} \circ S_{(BD)} \circ \varphi$ et $k = f \circ t_{\overrightarrow{CB}}$

Exercice 8:

Soit AFED un carré tel que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).
1)Caractériser le déplacement r qui envoie F en E et E en D.
2)Soient $f = r \circ S_{(OI)}$ et $g = t_{\overrightarrow{OI}} \circ r^{-1}$
a)Donner la nature et les éléments caractéristiques de f
b)Mque g est une rotation dont on précisera l'angle.
c)Déterminer g(O).En déduire le centre de g.
3)Soit h l'antidéplacement défini par h(D) = F et h(O) = I
a)Mque h est une symétrie glissante.
b)Donner la forme réduite de h.
4)Soit M un point de plan P.
a)Mque h(M)=g(M) $\Leftrightarrow$ f(M)=M
b)En déduire l'ensemble des points M tels que h(M)=g(M)

Exercice 9: (3 points)

On note H l'orthocentre d'un triangle équilatéral direct ABC et B' le milieu de [AC].
On désigne par r_A, r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B et C et de même angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $f = r_A \circ r_B$, $g = r_C \circ r_B \circ r_A$ et $h = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$
1) a) Déterminer f(C), f(B) et g (B)
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.
2) Soit d la droite parallèle à (AC) passant par B
a) Montrer que $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} = S_d \circ S_{(AB)}$
b) Déduire que h est une symétrie glissante.

Exercice :10 (5 points)

ABC un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et O le milieu de [BC].
1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O en A et B en C.
b) Montrer que f est une rotation.
c) On note I le centre de f.
Donner une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO})$ et $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA})$
d) En déduire que I appartient au segment [AB] et que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).
2) a) Soit $r = R_{(C,\frac{\pi}{3})}$.
Caractériser l'application f o r.
b) On note C' l'image de C par f.
Montrer que O , I et C' sont alignés .
3) Soit g l'antidéplacement qui envoie O en A et B en C.
a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 11:

Dans un plan orienté, on considère un triangle rectangle en B et tel que $(\vec{AB},\vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par O le milieu de [AC] et par J =B*C

1)Mqu'il existe un unique déplacement R tel que R(A) = O et R(B)=C

2)a)Montrer que R est une rotation puis construire son centre D.

b)Donner la nature du quadrilatère ABOD

3)On désigne par R_C=r(C, $\frac{\pi}{3}$), R_B=r(B, $\frac{\pi}{3}$) et T=$t_{\vec{BC}}$ On pose f = R_C o T o R_B.

a)Déterminer f(B).

b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

4)On désigne par I le milieu de [OA] et par K le milieu de [AB], Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.

a)Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b)Montrer que φ(O)=D

c)Soit E = φ(D), montrer que E et B sont symétriques par rapport à O.

Exercice 12:

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\vec{CA},\vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient D= r(C) et E = r^{-1}(B), I = C * D

1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A

b)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2)Soit g = f o r

a)Montrer que g est une translation

b)Soit F=g(E), montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

c)Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3)Soit G= $t_{\vec{AD}}$ (I)

a)Mqu'il existe un unique antidéplacement φ tel que φ(C) = D et φ(I) = G

b)Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice 13:

Soit ABC un triangle équilatéral direct et H le milieu de [BC].

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [HA) en un point I.

On note J le symétrique de I par rapport à (AC).

1)Montrer que $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

2)Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme B en C et I en J.

b)M que f est une rotation que l'on caractérisera.

3)Caractériser f o $S_{(AI)}$.

4)La droite (AC) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en D.

On pose g = $S_{(AI)}$ o $S_{(BD)}$

a)Mque g est une translation dont on donnera le vecteur.

b)Caractériser l'isométrie f o g.

c)Soit K l'antécédent de J par f o g. Montrer que BCIK est un parallélogramme.

Exercice 14 :

ABC est un triangle équilatéral direct.

Ω = $S_{(AC)}$(B) et I = A*C

1)Soit r la rotation d'angle $\pi/3$ et telle que r(A)=C

a)Déterminer le centre de r ;

b)Construire B' = r(B) ; déduire que C= A*B'

2)On pose φ=$S_{(AB)}$or

a)Montrer que φ est une symétrie glissante.

b)Donner la forme réduite de φ

3)Soit J=B*B' et g l'antidéplacement tel que g(A)=C et g(B)=B'

a)Mque g est une symétrie glissante.

b)Construire I'=g(I)

c)Déduire la forme réduite de g

Exercice 15

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que AB = 2 AD.

Soient I, J et F les points définies par :

I = A*B ; J = D * C et C = B * F

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement S qui envoie A en C et I en J

b) Caractériser S

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [CD].

(BD) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et recoupe le cercle $\mathscr{C}'$ en N ; on pose M' = $S_{(IJ)}$(M)

a) Montrer que N = S (M)

b) Déduire que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles.

3) a) Montrer qu'il existe une seule isométrie f vérifiant f(A) = C, f(I) = J et f(D) = F

b) Montrer que f est antidéplacement.

c) Déterminer f(B).

d) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g = f o $S_{(AD)}$.

Exercice 16:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Placer les points A(1) , B(j) et C(j²) où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral de centre O.

2) Désignons par I = B*C , K = B*A et L = A*C

a) Caractériser l'antidéplacement f qui envoie B en C et K en I

b) Définir la transformation $\varphi = f^{-1} o S_{AC}$

3) On désigne par s_1, s_2 et s_3 les symétries orthogonales respectivement par rapport aux droites (OA),(OB) et (OC) et par r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point du plan, $M_1 = s_1(M)$, $M_2 = s_2(M)$, $M_3 = s_3(M)$.

a) Montrer que $M_2 = r^2(M_1)$ et $M_3 = r(M_1)$ (où r² désigne r ○ r).

b) Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral lorsque M est distinct de O.

4) Soit M un point quelconque du plan P, d'affixe z non nul.
Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 ont pour affixes respectives $\bar{z}$, $j^2\bar{z}$ et $j\bar{z}$,.

5) Soit M_4 le symétrique de M par rapport à la droite (BC).

a)Mque le point I est le milieu du segment $[M_1M_4]$.

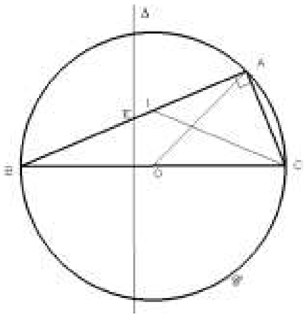
b) En déduire que l'affixe de M_4 est $Z = -1 - \bar{z}$

6) a) Montrer que les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés si et seulement si $\frac{-1+j^2\bar{z}}{j^2\bar{z}-j\bar{z}}$ est réel.

b) Déduire l'ensemble des points M tels que les points M_2, M_3 et M_4 sont alignés.

(On rappelle que : 1 + j + j² = 0 , $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$)

Exercice 17:



Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure donnée ci contre

- C est un cercle de diamètre [BC] et de centre O.
- A le point de
- C tel que

$\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

- I le point de [AB] tel que AI = AC.
- K le milieu de [AB].
- Δ La perpendiculaire à (BC) passant par K .

1°)a) Montrer que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$.

b) En déduire que le triangle IBC est isocèle en I.

2°)a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que R(C) = I et R(I) = B.

b) Préciser l'angle de R et construire son centre Ω.

c) Montrer que Ω appartient au cercle C.

d) Montrer que O, I et Ω sont alignés.

3°) La médiatrice de [IB] recoupe C en J.

a)Montrer que A et J sont symétriques par rapport à (OI) et que C, I et J sont alignés.

b)En déduire que R(A) = J

4°) La droite (ΩA) coupe (BC) en D.

a) Montrer que AJBD est un parallélogramme.

b)Soit f l'antidéplacement tel que f(A) = B et f(J) = D. Montrer que f est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ où A' est le projeté orthogonal de A sur (BC).