Exercice1

$ABCD$ est un carré direct de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie orthogonale S_Δ et telle que : $f(B)=C$ et $f(D)=A$.

1. a) Montrer que O est invariant par f et que c'est l'unique point du plan invariant par f.

   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $g=f\circ S_\Delta$ et $\varphi=S_\Delta\circ f$.

a) Chercher $g(A)$ et $g(C)$. En déduire que $g=S_{(AC)}$.

b) Montrer que $\varphi=S_{(BD)}$.

c) En déduire la nature de $g\circ\varphi$

Exercice2

Le plan est orienté dans le sens direct .$ABCD$ est un losange de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. I et le milieu du segment $[AB]$, J et le milieu du segment $[AD]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

   b) Caractériser f.

   c) Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2. Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $S(A)=C$

   a) Déterminer l'image du segment $[BD]$ par S.

   b) En déduire que S est la symétrie axiale d'axe (BD).

3. Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $g(A)=D$.

a) Montrer que $g(D)=B$.

b) Caractériser alors g.

Exercice3

Dans le plan P orienté, on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que : $AB = 2\,BC$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit $I = A*B$ et $J = C*D$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

   b) Prouver que $f(B) = D$.

   c) Montrer que f est une symétrie glissante.

2. Soit $E = f(C)$.

a) montrer que $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$.

b) Prouver que $D = A * E$.

c) Soit $F = f(D)$. Montrer que $ABFE$ est un carré direct.

3. Montrer que $f\circ S_{(AB)}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre. En déduire la forme réduite de f.

4. soient ζ et ζ' les cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[CD]$. (AC) recoupe ζ en M et (CE) recoupe ζ' en M'. On pose $N = S_{(OI)}(M')$. Montrer que (MN) et (AD) sont parallèles.

Exercice4

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$.On note O le milieu de $[BC]$ et R la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan transformant A en O et C en B.

   b) En déduire que f est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ Construire son centre I.

   c) Montrer que $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$.En déduire que le point I appartient au segment $[AB]$.

2. On pose $\varphi = S_{(IC)}\circ S_{(BC)}\circ S_{(OI)}\circ S_{(IC)}$.

   a) Montrer que $\varphi = R\circ f$

   b) Préciser $\varphi(A)$ puis caractériser φ .Déduire alors que $R^{-1}\circ S_{(AB)} = f\circ S_{(AC)}$.

3. a) Soit g l'antidéplacement, transformant A en O et C en B.

   b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe Δ et le vecteur $\vec{u}$.

   c) Soit D le point du plan tel que $ABDC$ soit un rectangle .Montrer que $g(O) = D$.

   d) On pose $B' = g(B)$. Montrer que $B' = S_D(B)$.

Exercice5

Le plan est orienté dans le sens direct, ABC est un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ et O le milieu de $[BC]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme O en A et B en C.

   b) Montrer que f est une rotation. On note I son centre.

   c) Donner une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}\right)$. Déduire que I appartient au segment $[AB]$ et que I est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

2. a) Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Caractériser l'application $f\circ r$.

   b) On note C' l'image de C par f. Montrer que les points O , I et C' sont alignés.

3. Soit g l'antidéplacement qui transforme O en A et B en C.

a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

b) Donner la nature de g et ces éléments caractéristiques.

Exercice 6

Dans le plan P on considère un triangle rectangle isocèle IAB tel que $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Soit K le milieu de $[IA]$ et L le milieu de $[IB]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en I et I en B.

   b) Préciser son angle θ. En déduire que f est une rotation de centre Ω milieu du segment $[AB]$.

2. Soit H le symétrique de I par rapport à A. La perpendiculaire a (ΩH) en Ω coupe (BI) en C.

   Montrer que $f(H)=C$.

3. Soit g l'antidéplacement tel que $g(A)=I$ et $g(I)=B$.

   a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

   b) Déterminer et construire le point Ω' image de Ω par g.

   c) On pose $h=t_{\overrightarrow{IA}}\circ g$. Déterminer $h(\Omega)$ et $h(A)$. Caractériser alors h.

4. Pour tout point M du plan on pose $M'=f(M)$ et $M''=g(M)$. Montrer que M' *et* M'' sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice7

$ABCD$ est un carré de centre H tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. F et G les milieux respectifs de $[AD]$ et $[AB]$, la droite (BF) coupe (AC) en O et (CD) en E.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui transforme E en C et D en B. Caractériser R.

   b) Montrer que $R(F) = G$ et que les droites (OB) et (CG) sont perpendiculaires.

   c) Montrer que les points D, O et G sont alignés.

   d) Déduire que les droites (OG) et (CF) sont perpendiculaires.

2. Soit g l'antidéplacement qui transforme E en C et D en B.

   a) Montrer que g est une symétrie glissante.

   b) Caractériser g.

3. Soit $f=R^{-1}\circ g$.

   a) Déterminer $f(E)$ et $f(D)$.

   b) Déduire que $g=R_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}\circ S_{(ED)}$.

   c) En décomposant convenablement $R_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}$ retrouver la nature de g ainsi que ses éléments caractéristiques.

Lycée pilote de Tunis	Déplacements antidéplacements	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	éléments de Corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. a) f conserve le milieu. Donc O est invariant par f.

   Supposons qu'il existe un autre point O' invariant par f. Donc f est soit une symétrie axiale soit l'identité du plan.

   - Si f est une symétrie axiale alors $f = S_\Delta$ car $f(B)$=C. absurde.
   - Si f est l'identité du plan alors $f(B)=B$. absurde. Ainsi O est l'unique point invariant.

   b) f est une isométrie qui admet un seul point invariant O, donc f est une rotation de centre O.

$$\begin{cases} f(O)=O \\ f(B)=C \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow f = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$$

2. Soit $g = f\circ S_\Delta$ et $\varphi = S_\Delta\circ f$.

   a) $g(A)=A$, $g(C)=C$. g est une isométrie qui laisse invariant les deux points distincts A et C donc g est soit une symétrie axiale soit l'identité du plan.

   Or g est distinct de l'identité car si non f soit égale à S_Δ ce qui est absurde. Ainsi g est la symétrie d'axe (AC).

   b) φ fixe B et D donc φ est la symétrie d'axe (BD).

   c) $g\circ\varphi = S_{(AC)}\circ S_{(BD)} = S_O$ car $(AC)\perp(BD)$ en O.

Exercice2

1. a) $AB=AD$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc ABD est équilatéral et donc $AB=BD\neq 0$. Il existe donc un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

   b) $f\circ f(A)=D\neq A$ donc $f\circ f$ n'est pas l'identité et par suite f est une symétrie glissante.

   Désignons par $\vec{u}$ *et* Δ le vecteur et l'axe respectifs de f. On sait que $f = S_\Delta\circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$.

   On vérifie facilement que $\vec{u}=\overrightarrow{IO}$ *et* $\Delta=(IO)$.

   c) $f(ABD)$ est un triangle équilatéral indirect (f antidéplacement). $f(A)=B$ et $f(B)=D$ donc $f(ABD)=BDC$.

2. *a)* S transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $S(A)=C$ alors $S([BD])=[BD]$.

b) $S([BD])=[BD]$.Deux cas se présentent :

- S(B)=B et $S(D)=D \Rightarrow S=S_{(BD)}$
- $S(B)=D$ et $S(D)=B$. O milieu de $[BD]$ donc S(O)=$O \Rightarrow S$ est la symétrie axiale d'axe la médiatrice de $[BD]$ qui est (AC) donc $S(A)=A$ impossible car $S(A)=C \Rightarrow S=S_{(BD)}$.

3. a) g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $g(A)=D$ donc

   $g(\{B,D\})=\{B,C\}$.

   Si $g(D)=C$ donc g(B)=B donc g est une symétrie axiale, par suite $g \circ g$ est l'identité. Or $g \circ g(A)=C \neq A$.

   Absurde.

   Donc $g(D)=B$.

   b) g est un antidéplacement qui transforme A en D, D en B et B en C.

   g ne peut pas être une symétrie axiale car $g \circ g(A)=B \neq A$ donc g est une symétrie glissante de vecteur

   $\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{JO}$ et d'axe la droite (JO).

Exercice3

1. a) $AI=CJ \neq 0$ donc il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(I)=J$.

   b) $I=A*B$ et f conserve le milieu donc $f(I)=f(A)*f(B) \Rightarrow J=C*f(B)$. D'où $f(B)=D$.

   c) les médiatrices de $[AI]$ et $[CJ]$ sont différentes donc f est une symétrie glissante.

2. a) f antidéplacement donc f change les mesures des angles orientés en leurs opposés donc

   $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}) \equiv -(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   b) $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}) \equiv \pi[2\pi]$ et $ED=CB=AD$ donc $D=A*E$.

   c) $F=f(D)$. f conserve la distance et l'orthogonalité donc l'image d'un rectangle est rectangle

   $ABCD$ est un rectangle donc $CDEF$ est un rectangle. Comme $AB=2\,BC$ alors $ABFE$ est un carré direct.

3. $f \circ S_{(AB)}$ est un déplacement qui transforme I en J et A en C et $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{JC}) \equiv \pi[2\pi]$ donc $f \circ S_{(AB)}=S_O$

   $f \circ S_{(AB)}=S_O \Rightarrow f=S_O \circ S_{(AB)}=S_{(IJ)} \circ S_\Delta \circ S_{(AB)}$ avec Δ médiatrice de $[BC] \Rightarrow f=S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ c'est la forme réduite de f, puis que (BC) et (IJ) sont parallèles.

4. $t_{\overrightarrow{BC}}(I)=J$ et $S_{(IJ)}(J)=J$ donc $f(I)=J$ et par suite f(ζ)=(ζ')

   M est un point de $(AC) \cap$ ζ or f(ζ)=(ζ') et $f(AC)=(EC)$ donc $f(M)$ est le point d'intersection de (EC) et ζ' soit $f(M)=M'$.

   On a $f(M)=M'$ donc $S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}(M)=M' \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BC}}(M)=S_{(IJ)}(M')=N \Rightarrow$ d'où les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Comme (BC) et parallèle à (AD) par suite (MN) et parallèle à (AD).

Exercice4

1. a) $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\frac{AC}{2OB}\Rightarrow AC=OB\neq 0$. Donc il existe un unique déplacement f du plan transformant A en O et C en B.

   b) l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}\left[2\pi\right]$. Le centre de f est le point d'intersection des médiatrices de $\left[AO\right]$ et $\left[CB\right]$.

   c) $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\equiv-\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$. En effet IBC est isocèle en I et $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\left[2\pi\right]$.

   $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IO}\right)+\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\equiv-\pi\left[2\pi\right]\Rightarrow I\in\left[AB\right]$.

2. a) $S_{(IC)}\circ S_{(BC)}=R_{\left(C,2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CI}\right)\right)}=R_{\left(C,-\frac{\pi}{3}\right)}$ et $S_{(OI)}\circ S_{(IC)}==R_{\left(I,2\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IO}\right)\right)}=R_{\left(C,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

   Donc $\varphi=R\circ f$

   b) $\varphi(A)=R\circ f(A)=R(O)=A$. φ est la composée de deux déplacements donc c'est un déplacement d'angle la somme $-\frac{\pi}{3}+-\frac{2\pi}{3}=-\pi$, φ est alors une symétrie centrale . Comme φ fixe A alors c'est la symétrie centrale de centre A.

   $\varphi=S_{(AB)}\circ S_{(AC)}=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ donc $R\circ f=S_{(AB)}\circ S_{(AC)}\Rightarrow R^{-1}\circ S_{(AB)}\circ S_{(AC)}=f\Rightarrow$

   $R^{-1}\circ S_{(AB)}=f\circ S_{(AC)}$.

3. On sait que g existe puisqu'on prouver l'existence de f. Les médiatrices de $[OA]$ et de $[BC]$ sont différentes donc g est glissante.

   On sait aussi que l'antidéplacement g^{-1} transforme O en A et B en C est que c'est une symétrie glissante.

   Il existe donc une unique droite Δ et un unique vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ tel que $g^{-1}=S_{\Delta}\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ S_{\Delta}$

   On a : $g^{-1}\left(B\right)=C$ et O milieu de $[BC]$ donc O est un point de Δ comme $g^{-1}\left(O\right)=A$ alors $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\Delta=(OA)$. Donc $g^{-1}=S_{(OA)}\circ t_{\overrightarrow{OA}}=t_{\overrightarrow{OA}}\circ S_{(OA)}\Rightarrow g=S_{(OA)}\circ t_{\overrightarrow{AO}}=t_{\overrightarrow{AO}}\circ S_{(OA)}$.

   c) $t_{\overrightarrow{AO}}\circ S_{(OA)}\left(O\right)=D$ car $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

   d) $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DB'}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\pi\left[2\pi\right]$ (un antidéplacement change les mesures des angles orientés en leurs opposés)

   Aussi $g\left(\left[DB'\right]\right)=\left[OB\right]\Rightarrow DB'=OB$ donc $DB'=DB$ et par suite $B'=S_D(B)$.

Exercice 5

1. a) $OA=OC$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CO}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$, donc OAC est équilatéral de plus $OA=OB$ (Car ABC rectangle en A).

   Donc $AC=OB\neq 0$. Il existe donc un unique déplacement f qui transforme O en A et B en C.

   b) $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\left[2\pi\right]\equiv\frac{2\pi}{3}\left[2\pi\right]$. Donc f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

c) Comme (IO) médiatrice de $[BC]$ alors $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou bien

$(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{3}+\pi[2\pi]$ le deuxième cas étant impossible donc $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

A étant l'image de O par f alors $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

d) $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}) \equiv (\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IO})+(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB})[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$. Donc I appartient au segment $[AB]$.

$\cos AIC = \frac{AI}{IC} = \frac{AI}{BI} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB = 2IA$. Comme $I \in [AB]$ alors $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{O}$ et par suite I est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

2. a) $f \circ r$ est un déplacement comme composée de deux rotations l'angle de ce déplacement est π donc $f \circ r$ est une symétrie centrale et comme $f \circ r(A) = A \Rightarrow f \circ r = S_A$.

   b) $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC'}) \equiv (\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IC'})[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IC'}) \equiv \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$. Donc les points O , I et C' sont alignés.

3. a) ***On sait qu'une isométrie conserve l'orthogonalité.***

   $(OI) \perp (OB)$ et $g(O) = A$ et $g((OB)) = (AC)$ donc $g((OI))$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par A. Donc $g((OI)) = (AB)$.

   On sait qu'un antidéplacement échange les mesures des angles orientés en leurs opposés.

   On a $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et donc si $A' = g(A)$ alors $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ mais comme

   $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. D'où $g((OA)) = (OA)$.

   b) g est un antidéplacement $med[OA] \neq med[BC]$ alors g est une symétrie glissante, ***il existe donc une droite*** Δ ***unique et un seul vecteur*** $\vec{u}$ ***directeur de*** Δ ***tels que*** $g = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$.

   $g(B) = C$ donc le milieu O de $[BC]$ est un point de la droite Δ.

   $A = g(O) = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta(O) = t_{\vec{u}}(O) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

   Finalement $g = S_{(AO)} \circ t_{\overrightarrow{OA}} = t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{(AO)}$.

Exercice6

1. a) Le triangle IAB est isocèle de sommet principal I donc $AI = IB \neq 0$ donc f existe.

   b) $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{IB}) \equiv \pi + (\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$; l'angle de f est non nul donc f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω.

   On sait que $f \circ f$ est un déplacement d'angle π donc $f \circ f = S_\Omega$ or $f \circ f(A) = B$ donc Ω est le milieu de $[AB]$.

2. Dans une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, une droite et son image sont perpendiculaires. H est le point d'intersection des droites (ΩH) et (AI) donc son image est le point d'intersection des droites images à savoir (ΩC) et (BI).

   Donc $f(H) = C$.

3. $g \circ g(A) = B \neq A$ donc g ne peut pas être une symétrie orthogonale et par suite g est une symétrie glissante, donc Il existe donc une unique droite Δ et un unique vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ tel que $g = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$

$g(A) = I$ donc le milieu K de $[IA]$ est un point de Δ. g conserve le milieu donc $g(K) = L$ et donc

$g = S_{(KL)} \circ t_{\overrightarrow{KL}} = t_{\overrightarrow{KL}} \circ S_{(KL)}$

b) Le triangle ΩAI est isocèle rectangle indirect en Ω donc le point Ω' est tel que le triangle $\Omega' IB$ est isocèle rectangle direct en Ω'.

c) $h = t_{\overrightarrow{IA}} \circ g$. $h(\Omega) = \Omega$ et $h(A) = A$. h est un antidéplacement qui fixe A et Ω, donc $h = S_{(\Omega A)}$.

4. $M'' = g(M) = g\left(f^{-1}(M')\right)$

Or l'antidéplacement $g \circ f^{-1}$ fixe les deux points distincts I et B donc c'est la symétrie orthogonale d'axe (IB). Ainsi $M'' = g\left(f^{-1}(M')\right) = S_{(IB)}(M')$.

Exercice7

1. a) Vérifier que $ED = CB \neq 0$ donc R existe et est unique et $R = R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

b) Conservation du milieu par R : $F = A*D$ donc $R(F) = A*B = G$.

$R(EF) = (CG)$ donc (EF) perpendiculaire à (CG) or $(EF)=(OB)$ …

c) Vérifier que O est le centre de gravité de ADB.

d) Dans le triangle (CGF) on a (CA) et (OB) sont deux hauteurs donc O est l'orthocentre de ce triangle et par suite (OG) et (CF) sont perpendiculaires.

2. a) Les médiatrices de $[ED]$ et $[BC]$ sont distinctes donc g est une symétrie glissante.

b) On sait qu'il existe une unique droite Δ et un unique vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ tel que $g = S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$.

Comme $g(E) = C$ alors $D = E * C$ est un point de Δ or $g(D) = B$ donc $\Delta = (DB)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{DB}$.

3. a) $f(E)=E$; $f(D)=D$ et f est un antidéplacement qui fixe les points E et D donc $f = S_{(ED)}$.

b) $f = R^{-1} \circ g \Leftrightarrow R \circ f = g \Leftrightarrow R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(ED)} = g$

c) $g = R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(ED)} = S_{\Delta'} \circ S_{(AD)} \circ S_{(ED)}$ avec $\Delta' = R_{\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)}\left((AD)\right) = (AC)$ donc

$g = S_{\Delta'} \circ S_D = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_1} \circ S_{(BD)}$ avec Δ_1 la perpendiculaire à (BD) passant par $D \Rightarrow g = t_{\overrightarrow{DB}} \circ S_{(BD)}$.