

Exercice 1

on considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2BC$ et $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

on désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1°) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b) Caractériser f puis en déduire que $f(B) = D$.

2°) Déterminer la droite Δ telle que $f = S(I, \frac{\pi}{2}) \circ S_{\Delta}$.

3°) soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $r(B)$, $r(C)$ et $r(J)$.

b) Soit M un point de [CJ], la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M'.

Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit [CJ]?

4°) on pose $g = r \circ f = r(r, \frac{\pi}{2})$

a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer $g(A)$

c) Déduire la construction du centre de g.

5°) a) Montrer qu'il existe un unique anti-déplacement h tel que $h(A) = C$ et $h(I) = J$.

b) Montrer que h est une symétrie glissante

c) Montrer $h(B) = D$

6°) on propose de déterminer les éléments caractéristiques de h en utilisant deux méthodes:

1^{re} Méthode a) Déterminer $h \circ S_{(AB)}(A)$ et $h \circ S_{(AB)}(B)$

En déduire $h \circ S_{(AB)}$

b) Déterminer les éléments caractéristiques de h.

2^e Méthode: a) on pose $D' = h(D)$. Montrer que $(\vec{CD}, \vec{CD}') = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $CD' = AD$

En déduire que D' est la symétrique de B par rapport à C.

b) En déduire les éléments caractéristiques de h.

c) Construire le point $C' = h(C)$

7°) Le cercle de diamètre [AB] recoupe [AC] en E

le cercle de diamètre [CD] recoupe [CC'] en E'

soit F la symétrique de E' par rapport à (IJ)

Montrer que (EF) est parallèle à (AD)

Exercice 2

on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 soit E le point du plan tel que DCE est un triangle équilatéral direct
 on désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments [DC], [AD]
 et [DE] et par O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE.

1°) on pose $\Psi = R(D, \frac{\pi}{3}) \circ S(I, \frac{1}{2})$

- a) Déterminer $\Psi(C)$ et $\Psi(D)$
- b) Montrer alors que Ψ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques

2°) a) Caractériser l'application $t_{\vec{AB}} \circ S(A, B)$

- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application

$\Psi = t_{\vec{BD}} \circ S(A, B)$

- 3°) pour tout N du plan on considère les points $N_1 = R(D, \frac{\pi}{3})(N)$
 et $N_2 = R(O, -\frac{2\pi}{3})(N)$
 Montrer que le milieu du segment $[N_1, N_2]$ est un point fixe que l'on précisera

- 4°) Soit M_0 un point du plan, on considère la suite des points (M_n) telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\Psi(M_m) = M_{m+1}$

- a) Montrer par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a : $\vec{M_0 M_{2m}} = (2m) \vec{JL}$

- b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, M_{2m} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})
 Déterminer les expressions analytiques, la nature et les éléments caractéristiques

de f dans chacun des cas ci-dessous :

- a) $A(1, 2)$ et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $f = R(A, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\vec{u}}$
- b) $D: 2x - 3y + 1 = 0$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $f = t_{\vec{u}} \circ S_D$
- c) $D_1: y - 1 = 0$, $D_2: x - y + 1 = 0$ et $f = S_{D_1} \circ S_{D_2}$

