SÉRIE SIMILITUDES

EXERCICE 1 :

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de sens direct et de centre I. Soit E le point tel que DCE est équilatéral direct. On pose $J = D * C$, $O = A * D$ et $K = D * E$.

1) Soit $f = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)} o\ S_{(IJ)}$.
   a) Déterminer $f(C)$ et $f(D)$.
   b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite.
2) Soit $g = t_{\overrightarrow{BD}}$ o $S_{(AB)}$. Caractériser g.
3) Soit $D' = h_{(A,-2)}(B)$ et H le projeté orthogonal de A sur (DD'). On donne les points définis par : $O' = A * D'$, $H' = S_O(H)$ et $H_1 = S_{O'}(H)$.
   a) Montrer que $\overrightarrow{H_1H'} = 2\overrightarrow{O'O}$.
   b) Soit φ la similitude directe telle que $\varphi(D) = D'$ et $\varphi(H) = H_1$. Déterminer l'angle, le centre puis le rapport de φ.
   c) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(H')$.
4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AD]$ et $\mathscr{C}'$ celui de diamètre $[AD']$ et $M \in \mathscr{C} \setminus \{A,D,H,H'\}$.
   a) Soit $M' = \varphi(M)$. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A}})\quad [2\pi]$.
   b) Montrer que M, H et M' sont alignés.

EXERCICE 2 :

Dans le plan orienté on considère deux triangles équilatéraux directes ADB et ACE tels que : $AB = AC = 4$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}\quad [2\pi]$. On note $O = B*C$; $J = A*E$ et $I = A*D$.

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre C telle que $S(J) = A$.
2) On pose $K = S(O)$. Déterminer le rapport de la similitude directe S' de centre B telle que $S'(A) = I$. Préciser $S'(K)$.
3) Soit $R = S'$ o S.
   a) Montrer que R est une rotation de centre O. Préciser son angle.
   b) En déduire que OIJ est un triangle équilatéral.
4) Soit R' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Montrer que R' o S est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
   b) Déterminer R' o $S(C)$ et R' o $S(J)$.
   c) En déduire une construction du centre H de R' o S.

EXERCICE3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note S la similitude directe d'écriture complexe : $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1-3i}{2}$.

1) Déterminer le rapport k, une mesure de l'angle θ et l'affixe du centre Ω.
2) On note M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3i$. Pour tout entier naturel n, on note le point $M_{n+1}=S(M_n)$.
   a) Montrer par récurrence que $\Omega M_n=\frac{1}{2^{n-3}}$.
   b) Déterminer l'entier n_0 à partir duquel le point M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon 0.01.
3) On pose $d_n=M_nM_{n+1}$ et $u_n=\sum_{k=0}^{n}d_k$.
   a) Montrer que la suite d est géométrique.
   b) Déterminer la limite de u.

EXERCICE 4 :

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On pose $D=S_A(C)$ et $E=S_B(D)$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que $S(C)=D$. En déduire $S(D)$.
   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que la similitude directe de centre Ω de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en C et C en E. Construire alors Ω et vérifier que A, E et Ω sont alignés.
2) Le plan est rapporté au R.O.N.D $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Déterminer l'application complexe associée à S. En déduire l'affixe de Ω.
3) Soit σ la similitude indirecte telle que : $\sigma(A)=B$ et $\sigma(B)=C$.
   a) Montrer que D est le centre de σ.
   b) On pose $\varphi=\sigma\circ S^{-1}$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale que l'on précisera. Déterminer alors $\sigma(C)$.
4) Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=(-1+i)\bar{z}+1$. Montrer que $f=\sigma$.

EXERCICE 5 :

On considère dans le plan orienté un triangle OAB tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OA=2OB$.

Soit Ω le projeté orthogonal de O sur (AB) et $E=S_{(OA)}(\Omega)$ et $F=S_{(OB)}(\Omega)$.
1) Montrer que $(FB)\perp(FO)$ et $(AE)\perp(OE)$.
2) Caractériser $S_{(OA)}\circ S_{(OB)}$ et en déduire que O est le milieu de $[EF]$.
3) Soit S la similitude directe telle que : $S(O)=A$ et $S(B)=O$.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que Ω et le centre de S.
   c) Montrer que $S(F)=E$ et que $EF=EA$.
4) Soit f la similitude indirecte telle que $f(F)=\Omega$ et $f(\Omega)=E$.

a) Déterminer le rapport de f.
b) Soit I le centre de f. Construire I.
c) Soit $J = S_F(I)$. Montrer que l'axe de f est la médiatrice de $[\Omega J]$.

EXERCICE 6 :

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[OB]$, $[BC]$ et $[OD]$. On pose $E = S_{(BC)}(O)$ et $\{G\} = (AE) \cap (BC)$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f vérifiant : $f(A) = C$ et $f(O) = E$.
   b) Montrer que f est une symétrie glissante. Donner la forme réduite de f.
   c) Déterminer $f(D)$.
   d) Soit $O' = f(K)$. Montrer que $O' = B * E$. En déduire que O, G et O' sont alignés.
2) On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et par R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Soit $S = h \circ R$.
   a) Montrer que S est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
   b) Déterminer $S(A)$ et $S(O)$ puis construire le centre Ω de S.
3) Soit $\sigma = h \circ f$.
   a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   b) Déterminer $\sigma(A)$ et $\sigma(O)$.
   c) Vérifier que $\sigma \circ \sigma\,(A) = I$. Déterminer alors le centre de σ .

EXERCICE 7 :

ABC étant un triangle rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{BC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit D le point du plan tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $K = S_A(B)$. On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[AD]$.

1) Soit S la similitude directe telle que $S(J) = B$ et $S(D) = K$.
   a) Montrer qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.
   b) Montrer que le rapport de S est 2 (on pourra montrer que CBK est équilatéral).
   c) Montrer que C est le centre de S.
2) Soit $A' = S_C(D)$ et f l'antidéplacement qui transforme D en A et A en A'.
   a) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.
   b) Montrer que $f(K) = C$.
3) On pose $g = f \circ S$.
   a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   b) Soit Δ l'axe de g et Ω son centre. Montrer que $(g \circ g)$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4. Vérifier que $g \circ g(D) = B$.
   c) Donner une construction de Δ.

EXERCICE 8 :

On considère dans le plan orienté un carré direct $ABCD$ de centre O.
Soit $I = A * B$ et $J = A * D$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Donner une construction géométrique du centre Ω de S.
c) Déterminer $S((BD))$ et $S((BC))$.
d) Préciser $S(B)$ et $S(A)$.
e) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(B,1)$ et $(J,4)$.

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $f = R \circ S$.

a) Préciser $h(B)$ puis caractériser h.
b) On note $E = B * \Omega$. Montrer que $O\Omega E$ est un triangle rectangle isocèle.

3) Soit σ la similitude indirecte qui envoie D en O et C en I.

a) Vérifier que $\sigma = S_{(OI)} \circ S$. Déterminer $\sigma(B)$.

b) Donner la forme réduite de σ.

EXERCICE 9 :

On considère les transformations f est g qui à tout point $M(z)$ associent respectivement $M'(z')$ et $M''(z'')$ tels que : $z' = 2i\overline{z} - 3$ et $z'' = i\overline{z} + 2$. Soit $A(i)$ et $B(1+2i)$.

1) Caractériser chacune des transformations f, g et $h = g \circ f$.
2) Déterminer les points $M(z)$ tels que l'affixe de $f(M)$ est solution de l'équation complexe : $2z^2 - iz + 1 = 0$.
3) Soit S la similitude directe telle que $S(O) = A$ et $S(A) = B$. On considère les points A_n définis par : $A_0 = O$ et $A_{n+1} = S(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Caractériser S. On notera Ω le centre de S.
   b) On note z_n l'affixe de A_n. Montrer que $z_n = 1 - (1-i)^n$.
   c) Comparer ΩA_n et A_nA_{n+1} et déterminer une mesure de $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}})$.
   d) En déduire une construction de A_{n+1} connaissant A_n. Construire A_3 et A_4.
   e) Déterminer les points A_n appartenant à la droite (ΩB).

EXERCICE 10 :

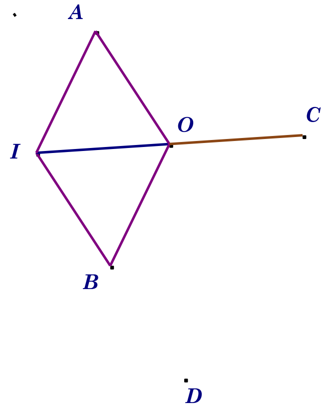
On considère un triangle IAB rectangle et isocèle en I et telque $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon IA et soit O le milieu de $[AB]$. La demi-droite $[OI)$ coupe $\mathscr{C}$ en D.

1) Soit S la similitude directe de centre A et qui transforme I en O. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
2) Soit K le projeté orthogonal de A sur (BD) et J le milieu de $[AD]$.
   a) Montrer que $S(D) = K$.
   b) Montrer que I, J et K sont alignés.
3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme J en K et K en A.
   a) Montrer que σ admet un centre.
   b) Montrer que D est le centre de σ.
   c) Déterminer la forme réduite de σ.
   d) Soit $A' = \sigma(A)$ et E le milieu de $[AA']$. Montrer que (JE) est paralléle à (BD).
4) Soit $f = \sigma \circ S$. Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

EXERCICE 11 :

Dans la figure ci-jointe $IBOA$ est un losange tel que $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B.



1) Soit S la similitude directe telle que $S(A) = C$ et $S(O) = D$.
   On pose $h = S \circ R_{(I\,;\,\frac{\pi}{3})}$.
   a) Déterminer $h(O)$ et $h(B)$.
   b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   c) Caractériser alors S.
2) Soit f la similitude indirecte telle que $f(C) = O$ et $f(D) = B$.
   a) Montrer que f admet un centre Ω.
   b) On note Δ l'axe de f, E le point d'intersection de Δ et (OC) et $E' = f(E)$. Montrer que $\overrightarrow{\Omega E'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega E}$.
   c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{\Omega E}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{\Omega E}})$ $[2\pi]$. En déduire que $\Delta \,//\, (CD)$.
   d) Soit $C' = S_\Delta(C)$. Montrer que E est le centre de gravité du triangle $\Omega CC'$.
   En déduire que $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EO}$.
   e) Construire alors le point E, l'axe Δ et le centre Ω de f.

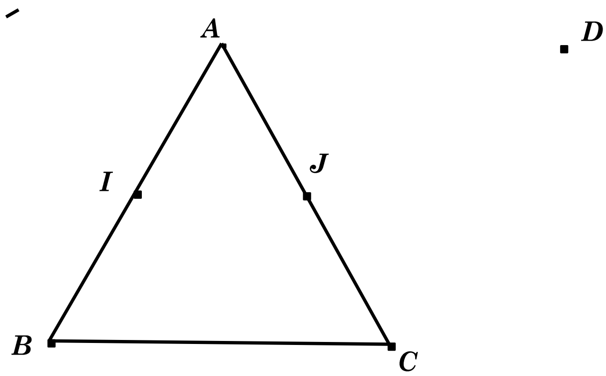
EXERCICE 12 :

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 2AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. On pose I le milieu du segment $[AB]$. On note D le point tel que : $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On considère la similitude indirecte f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = A$.

1) Déterminer le rapport de f.
2) Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à D.
3) Construire $D' = f(D)$.
4) Soit Δ la médiatrice de $[AD]$. Vérifier que $\Omega \in \Delta$ et que Δ est l'axe de f.
5) On rapporte le plan au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$.
   a) Déterminer l'écriture complexe de f.
   b) En déduire l'affixe de Ω et une équation de Δ.

EXERCICE 13 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC équilatéral direct de côté 2, on note $I = A * B$; $J = A * C$ et $D = S_{(AC)}(B)$. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et I sur J.



1) Déterminer le rapport et l'angle de f puis montrer que B est le centre de f.

2) Déterminer $f((IC))$.
3) Soit E l'antécédent de I par f. Montrer que le triangle IEB est isocèle et que les droites (BE) et (IJ) sont perpendiculaires. En déduire une construction de E.
4) On pose $g = f \circ S_{(AB)}$.
   a) Déterminer $g(B)$ et $g(A)$ puis caractériser g.
   b) On pose $C' = g(C)$. Montrer que A, C et C' sont alignés.
5) Dans la suite on rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ de façon que l'affixe de C est 1 et $O = B * C$.
   a) Donner l'écriture complexe associée à f.
   b) Montrer que l'écriture complexe associée à g est : $z' = i\sqrt{3}\,\bar{z} - 1 + i\sqrt{3}$.
   c) En déduire une équation de l'axe de g.

EXERCICE 14 :

$ABCD$ étant un rectangle de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ et $AB = 1$ et $AD = 2$. On pose E et F les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.

Soit f la similitude directe telle que $f(A) = F$ et $f(B) = D$.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
2) Déterminer $f((BC))$.
3) Soit $\{I\} = (AB) \cap (DF)$ et K le centre de f. Montrer que K appartient aux cercles circonscrits au triangles IAF et IBD. Construire alors K.
4) Soit g la similitude directe de centre F telle que $g(B) = D$. Caractériser $h = fog^{-1}$.
5) Soit S la similitude indirecte telle que $S(A) = F$ et $S(C) = E$. Caractériser S.
6) Le plan etant rapporté à un R.O.N.D $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$. Pour tout point $M(z)$ on pose $M'(z')$ tel que $f(M) = M'$.
   a) Exprimer z' en fonction de z. En déduire les coordonnées de K.
   b) Déterminer $f(E)$. En déduire l'ensemble C des points $M(z)$ tels que : $|(i-1)z+1+i| = \sqrt{2}$.