Lycée pilote de Tunis	**Similitudes planes 1**	**Terminales Maths**
Mr Ben Regaya. A	**+Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A. Soit D le symétrique de A par rapport à C et f la similitude directe qui transforme D en C et C en B.

1. a) Expliquer pourquoi f admet un centre que l'on note Ω.

   b) Déterminer l'angle de f.

2. Quelle est l'image de la droite (AC) par f ?

3. Démontrer que le triangle ΩBC est rectangle isocèle.

   Déduire une construction géométrique de Ω.

Exercice2

Dans le plan orienté P. On donne un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. S_1 est la similitude directe de centre C qui envoie D sur A.

1. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_1
2. On note B' l'image du point B par S_1
   a) Montrer que $S_1\langle(DB)\rangle = (AB)$
   b) Montrer que la droite (CB') est tangente au cercle circonscrit au carré $ABCD$.
   c) Construire alors le point B'.
3. S_2 est la similitude directe qui transforme O en A et A en B.
   a) Déterminer et construire $B_1 = S_2(C)$.
   b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_2.
   c) En déduire que $S_2 \circ S_1$ est une homothétie dont on déterminera le rapport.
4. Soit E le milieu du segment $[DC]$, la droite (AE) coupe la droite (DB) en I. Montrer que les points C, I et B_1 sont alignés.

Exercice 3

On considère un cercle (C) de diamètre $[OB]$ .Soit A un point du segment $[OB]$, distinct de O et de B, I le milieu de $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le cercle (C) en M et M' tels que $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).

1. Donner la nature du quadrilatère $AMBM'$. En déduire que la droite (AM') est perpendiculaire à (OM) et que N, A et M' sont alignés.
2. Soit S la similitude directe de centre N, telle que $S(M) = A$. Préciser l'angle de cette similitude.

   Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA). En déduire l'image par S du point M'.
3. Montrer que l'image par S du point I est le point I', milieu de $[OA]$. En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.
4. Soit f la similitude indirecte qui envoie M' en N et B en A.

   a) Déterminer les images des points M et B par l'application $f \circ S_{(OB)}$.

b) En déduire que l'application $f \circ S_{(OB)}$ est une homothétie.

c) Ecrire alors f sous sa forme réduite.

Exercice4

Soient A et B deux points du plan P et O le milieu de $[AB]$. Soit Γ le demi cercle défini par :

$$\Gamma = \left\{ M \in P / \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \right\}.$$

La médiatrice de $[AB]$ coupe Γ en I. Soit (C) le cercle de centre I et passant par A.

La demi-droite $[OI)$ coupe (C) en D et la droite (BD) coupe Γ en K.

1. Montrer que le triangle ADK est rectangle isocèle.
2. On note J le milieu de $[AD]$. Montrer que les points I, J et K sont alignés.
3. Soit S la similitude directe de centre A tel que $S(O) = I$.

   a) Soit L le point défini par $S(L) = J$. Montrer que $L \in (AK)$ et construire le point L.

   b) Montrer que les points O, L et J sont alignés.

   c) Construire la droite Δ image de la droite (BD) par S.

   d) Soit $\Omega \in \Delta \cap (AI)$, prouver que $\Omega \in$ (C).
4. Soit σ la similitude indirecte de centre D tel que : $\sigma(A) = K$.

   a) Déterminer son rapport et préciser son axe.

   b) Caractériser $\sigma \circ \sigma$. En déduire $\sigma(K)$.
5. On pose $f = \sigma \circ S$.

   a) Préciser $f(A)$ et $f(K)$.

   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 5

Dans le plan orienté, OAB est un triangle rectangle isocèle tel que $OA = OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

   b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).

   Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de f.
3. Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.

   a) Déterminer le rapport et l'axe de g. En déduire $g(O)$.

   b) Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$ En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.
4. Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.

   a) Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.

   b) Montrer que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Lycée pilote de Tunis	Similitudes planes 1	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. f similitude directe qui transforme D en C et C en B.

   ABC un triangle rectangle, d'après Pythagore $BC^2 = AC^2 + AB^2$ or D est le symétrique de A par rapport à C donc $CA = CD$ et par suite $BC^2 = CD^2 + AB^2 = 2CD^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{2}\,CD$. Alors f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2} \neq 1$ donc f admet un centre que l'on note Ω.

   b) f est une similitude directe qui transforme D en C et C en B donc l'angle de f est

   $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ car ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A.

   Finalement f est similitude directe de centre Ω de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. D est le symétrique de A par rapport à C donc A, D et C sont alignés et donc les droites (AC) et (DC) sont confondues. Or $f\langle(CD)\rangle = (BC) \Rightarrow f\langle(AC)\rangle = (BC)$.

3. f est la similitude directe de centre Ω de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ donc $\Omega B = \sqrt{2}\,\Omega C$ et $\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

   $\overrightarrow{C\Omega}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C\Omega}.\left(\overrightarrow{C\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right) = C\Omega^2 + \overrightarrow{C\Omega}.\overrightarrow{\Omega B} = C\Omega^2 + C\Omega \times \Omega B \times cos\left(\overrightarrow{C\Omega},\overrightarrow{\Omega B}\right)$

   $\Rightarrow \overrightarrow{C\Omega}.\overrightarrow{CB} = C\Omega^2 - \sqrt{2}\,C\Omega^2 \times cos\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}\right) = C\Omega^2 - \sqrt{2}\,C\Omega^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ Ainsi $(\Omega C) \perp (\Omega B)$ et comme $\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors le triangle ΩBC est rectangle isocèle en C.

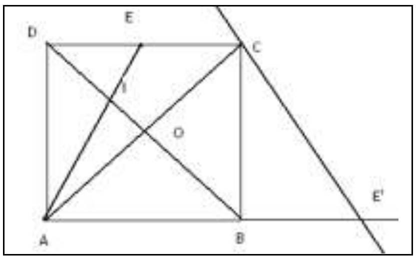
4. $f(C) = B$ et $f(D) = C$ donc $\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   Donc Ω est un point de l'arc BD du cercle de diamètre $[BD]$ et de la droite perpendiculaire à (BC) en C.

Exercice2

1. Détermination du rapport k et de l'angle θ de S_1 : On a $\begin{cases} k = \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{\sqrt{2}\,CD}{CD} = \sqrt{2} \\ \theta \equiv \left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

2. a) On sait que par une similitude l'image d'une droite est une droite.



$$\left.\begin{array}{l} S_1(D) = A \\ S_1(B) = B' \end{array}\right\} \Rightarrow S_1\langle(DB)\rangle = (AB')$$

Vérifions que la droite (AB') passe par B.

$$\left.\begin{array}{l} S_1(D) = A \\ S_1(B) = B' \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AB'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow$$

$\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right) \equiv 0[2\pi]$. Ainsi $A \in (AB')$. D'ou $S_1\langle(DB)\rangle = (AB)$.

b) Soit (C) le cercle circonscrit au carré $ABCD$. C est un point de (C) donc la droite (CB') est tangente à (C) lorsque $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB'}) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Or $S_1(B) = B' \Rightarrow (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Ainsi $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB'}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et donc $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c) B' n'est autre que le point d'intersection des droites (AB) et de la tangente à (C) en C.

3. $O \neq A$ et $A \neq B$. Donc S_2 existe.

a) On a O milieu de $[AC]$ et S_2 conserve le milieu donc $S_2(O) = S_2(A) * S_2(C) \Leftrightarrow A = B * S_2(C)$ donc $S_2(C) = S_A(B)$.

b) Désignons par k et θ le rapport et l'angle de S : $\begin{cases} k = \dfrac{AB}{\frac{1}{2}AC} = \dfrac{AB}{\frac{1}{2}\sqrt{2}AB} = \sqrt{2} \\ \theta \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB})[2\pi] \equiv \pi + (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

c) $S_2 \circ S_1$ est la composée de deux similitudes directes donc c'est une similitude directe d'angle π et de rapport $(\sqrt{2})^2 = 2$. Ainsi $S_2 \circ S_1$ est une homothétie de rapport $k = -2$.

4. On a $S_2 \circ S_1(C) = S_2(C) = B_1 \Rightarrow h(C) = B_1$.

Il suffit donc de prouver que I est le centre de h.

On a $h(D) = B$.

Or $S_1\langle[DC]\rangle = [CA] \Rightarrow S_1(E) = O$ or $S_2(O) = A$ et par suite $h(E) = A$.

Le centre de h est l'intersection des droites (DB) et (EA) c'est le point I. Ainsi I, C et B_1 sont alignés.

Exercice 3

1. $AMBM'$ est un losange car $(AB) \perp (MM')$ et les segments $[AB]$ et $[MM']$ ont même milieu I car $(\quad M' = S_{(OB)}(M) \quad)$.

<u>Déduction</u> : Montrons que (AM') est perpendiculaire à (OM).

$AMBM'$ est un losange d'où (AM') est parallèle à (BM).

On a $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où $(OM) \perp (BM)$. Ainsi $(AM') \perp (OM)$.

On a $\begin{cases} (AN) \perp (OM) \\ (AM') \perp (OM) \end{cases} \Rightarrow (AN) // (AM') \Rightarrow A, M', N'$ sont alignés.

2. On a $NA \neq 0$ et $NM \neq 0$ d'où la similitude directe de centre N qui transforme M en A est bien définie.
Soit θ l'angle de S
$\begin{cases} S(N) = N \\ S(M) = A \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv (\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NA})[2\pi]$ d'où l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$.

Déterminons les images de (MI) et (NA).

Comme l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$ alors une droite et son image par S sont perpendiculaires.

$S\langle(MI)\rangle$ est la perpendiculaire à (MI) passant par $S(M) = A$ qui n'est autre que la droite (AB). Par suite $S\langle(MI)\rangle = (AB)$.

De même $S\langle(NA)\rangle=(OM)$.

Déterminons l'image par S du point M'.

$\{M'\}=(MI)\cap(NA)\Rightarrow\{S(M')\}=(AB)\cap(OM)=\{O\}$. Par suite $S(M')=O$.

3. I milieu de $[MM']$ donc le point $S(I)$ est le milieu du segment $[S(M)S(M')]=[AO]$ d'ou I' est le milieu du segment $[OA]$.

Déduction : (NI) est tangent en N au cercle de diamètre $[OA]$.

$S(I)=I'\Rightarrow(\overrightarrow{NI},\overrightarrow{NI'})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow(NI)\perp(NI')$ et comme $(NA)\perp(NO)$ donc N est un point du cercle de diamètre $[OA]$ par suite (NI) est tangente au cercle de diamètre $[OA]$ en N.

4. f existe car $M'B\neq 0$ et $NA\neq 0$.

a) $f\circ S_{(OB)}(M)=f(M')=N$ et $f\circ S_{(OB)}(B)=f(B)=A$.

b) **Déduction $f\circ S_{(OB)}$ est une homothétie**.

$g=f\circ S_{(OB)}$ est une similitude directe comme étant la composée de deux similitudes indirectes.

Désignons par α et k l'angle et le rapport de g.

$$\begin{cases} g(M)=N \\ g(B)=A \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\equiv(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{NA})[2\pi]\\ k=\dfrac{NA}{MB}\end{cases}$$

Or $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{NA}$ sont colinéaires et de même sens d'où $\alpha\equiv 0[2\pi]$ et comme $NA\neq MB$ g est donc une homothétie de rapport k. Comme $g(B)=A$ et $g(M)=N$ alors le centre de g est $(AB)\cap(MN)=\{O\}$.

Par suite $g=f\circ S_{(OB)}=h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}$.

c) Forme réduite de f.

On a $f\circ S_{(OB)}=h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}\Leftrightarrow f=h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}\circ S_{(OB)}$. Comme (OB) passe par le centre de $h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}$ alors

$f=h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}\circ S_{(OB)}=S_{(OB)}\circ h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}$ et $h_{\left(O,\frac{OA}{OB}\right)}\circ S_{(OB)}$ est la forme réduite de f.

Exercice 4

$\Gamma=\left\{M\in P/(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$.

1. **Montrons que ADK est un triangle rectangle et isocèle.**

$K\in\Gamma$ d'où $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KD})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (car $\overrightarrow{KB}$ *et* $\overrightarrow{KD}$ sont colinéaires de sens contraires)

I étant le centre de (C) et $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Comme $D\in$ (C) et D appartient au même demi-plan de frontière (AB) contenant I ; alors $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})[2\pi]$ et donc $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$$\left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{KA})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow AKD \text{ est un triangle rectangle et isocèle en } K \text{ et de sens direct.}$$

2. ***J* le milieu de $[AD]$.Montrons que *K, I, J* alignés.**

On a : $\left.\begin{array}{l} KD = KA \\ ID = IA \\ JA = JD \end{array}\right\} \Rightarrow$ K, I, J appartiennent à la médiatrice de $[AD]$ donc K, I, J alignés.

3. AOI est un demi carré de diagonale $[AI]$ et de sens direct d'où $\begin{cases} \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{AI}{AO} = \sqrt{2} \end{cases}$ d'où $S = S_{\left(A, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)}$.

a) $S(L) = J$. Montrons que $L \in (AK)$.

On a : $\left.\begin{array}{l} \left(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ AD = \sqrt{2}AK \end{array}\right\} \Leftrightarrow S(K) = D$.

$\begin{cases} S(L) = J \\ S(K) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^{-1}(J) = L \\ S^{-1}(D) = K \end{cases}$. J est le milieu de $[AD] \Leftrightarrow S^{-1}(J) = S^{-1}(A) * S^{-1}(D) = A * K$ d'où L est le milieu de $[AK] \Rightarrow L \in (AK)$.

b) **Montrons que O, L, J sont alignés.**

On a $\begin{cases} OA = OK; & A \text{ et } K \in \Gamma \\ LA = LK\,; & L = A * K \\ JA = JK\,; & AJK \text{ isocèle en } J \end{cases}$ d'où O, L, J appartiennent à la médiatrice de $[AK]$ donc ils sont alignés.

c) Construction de $\Delta = S\langle (BD) \rangle$.

$(AK) \perp (BD)$ en $K \Rightarrow S\langle (AK) \rangle \perp S\langle (BD) \rangle$ en $S(K) \Rightarrow (AD) \perp \Delta$ en $D \Rightarrow \Delta$ est la droite perpendiculaire à (AD) en D.

d) $S\langle (BD) \rangle = (D\Omega) \Rightarrow \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{D\Omega}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$ comme $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ alors

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{D\Omega}\right) + k\pi$ comme de plus A, B et Ω ne sont pas alignés alors Ω, A, B et D sont sur un même cercle donc $\Omega \in$ (C).

4. σ la similitude indirect de centre D telle que $\sigma(A) = K$.

Soit k et δ le rapport et l'axe de σ.

$\sigma(A) = K \Rightarrow k = \dfrac{DK}{DA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DK}\right)$ ou $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ (car $\overrightarrow{DK}$ *et* $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de même sens). Comme le triangle ADB est isocèle en D alors la bissectrice de $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ est la médiatrice de $[AB]$ qui est (OD) d'où $\delta = (OD)$.

b) Caractérisation de $\sigma \circ \sigma$;

$\sigma \circ \sigma = S_{\left(D, \frac{\sqrt{2}}{2}, (OD)\right)} \circ S_{\left(D, \frac{\sqrt{2}}{2}, (OD)\right)} = h_{\left(D, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \circ s_{(OD)} \circ S_{(OD)} \circ h_{\left(D, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ donc $\sigma \circ \sigma = h_{\left(D, \frac{1}{2}\right)}$.

b) $\sigma(K) = \sigma \circ \sigma(A) = h_{\left(D, \frac{1}{2}\right)}(A) = J$ car $\overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} \Rightarrow \sigma(K) = J$.

5. $f = \sigma \circ S$

a) $\begin{cases} f(A) = \sigma \circ S(A) = \sigma(A) = K \\ f(K) = \sigma \circ S(K) = \sigma(D) = D \end{cases}$

b) f est la composée d'une similitude directe de rapport $k=\sqrt{2}$ et d'une similitude indirect de rapport $k'=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc f est une similitude indirect de rapport $kk'=1$ c'est-à-dire f est un antidéplacement.

Soit $\vec{u}$ et d le vecteur et l'axe de l'antidéplacement f. $f=S_d\circ t_{\vec{u}}=t_{\vec{u}}\circ S_d$.

$f\circ f(A)=f(K)=D\neq A$ alors $\vec{u}\neq\vec{0}$ et f est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AJ}$.

$\begin{cases} f(A)=K \\ f(K)=D \end{cases}$ $\Rightarrow$ d passe par les milieux des segments $[AK]$ et $[KD]$ $\Rightarrow d=(LL')\ (L\neq L')$.

<u>**Conclusion**</u> : $f=S_{(LL')}\circ t_{\overrightarrow{AJ}}=t_{\overrightarrow{AJ}}\circ S_{(LL')}$.

Exercice 5

1. Le rapport de f est : $\frac{DC}{AO}=\frac{2OB}{OB}=2$.

   L'angle de f est $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{DC})\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2. a) $(IC)\perp(AD)$ car (IO) est la médiatrice de $[AB]$ donc dans le triangle ACD, la droite (IC) porte la hauteur issue de C. $(AO)\perp(CD)$ donc dans le triangle ACD, la droite (AO) porte la hauteur issue de A.

   donc $(IC)\cap(AO)=\{O\}$ est l'orthocentre du triangle ACD.

   b) $f\langle(OJ)\rangle$ est la perpendiculaire à (OJ) passant par $f(O)=C$ qui n'est autre que la droite (AC).

   $f\langle(AJ)\rangle$ est la perpendiculaire à (AJ) passant par $f(A)=D$ qui n'est autre que la droite (DJ).

   On a :

   $f\langle(OJ)\rangle\cap f\langle(AJ)\rangle=(AC)\cap(DJ)=\{J\}$, comme $\{J\}=(OJ)\cap(AJ)$ alors

   $\{f(J)\}=f\langle(OJ)\rangle\cap f\langle(AJ)\rangle=\{J\}$ donc J est invariant par f, qui est de rapport différent de 1 d'où J est l'unique point fixe par f et par suite J est le centre de f.

3. a) $\frac{ID}{IA}=\frac{2IB}{IB}=2$ donc g est de rapport 2. L'axe de g porte la bissectrice intérieur de $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID})$ qui n'est autre que $(IC)\Rightarrow g=h_{(I,2)}\circ S_{(IC)}=S_{(IC)}\circ h_{(I,2)}$

   $g(O)=h_{(I,2)}\circ S_{(IC)}(O)=C$

   b) $g\circ f^{-1}(C)=C$ et $g\circ f^{-1}(D)=D$

   $g\circ f^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte g de rapport 2 et d'une similitude directe f^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g\circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport 1 donc c'est un antidéplacement .Comme $g\circ f^{-1}$ fixe les points C et D on a alors $g\circ f^{-1}=S_{(CD)}$.

4. a) $g\circ f^{-1}(J)=g(J)=J'$ et $g\circ f^{-1}(I')=g(I)=I$.

   b) Comme $g\circ f^{-1}(J)=J'$ et $g\circ f^{-1}(I')=I$ donc $S_{(CD)}(J)=J'$ et $S_{(CD)}(I)=I'$ d'où

   $S_{(CD)}\langle(IJ)\rangle=(I'J')$.

   Montrons que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes.

   Supposons qu'elles sont parallèles. On a : $S_{(CD)}(J)=J'$ donc $(CD)\perp(JJ')$ ce qui donne $(IJ)\perp(JJ')$

   D'autre part, $f(I)=I'$ donc $(IJ)\perp(JI')$ car f est de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi $(JI')\perp(JJ')$ par suite les points J, J' et I' sont alignés ce qui est absurde.

les droites (IJ) et (CD) sont sécantes et $S_{(CD)}\langle(IJ)\rangle=(I'J')$ donc les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.