Divisibilité 2

Exercice 1 :

Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

1) *Montrer que pour tout entier relatif x, si* $x^2 \equiv 1[\bmod p]$ *alors* $x^{p-5} \equiv 1(\bmod p)$
2) *Soit x un entier vérifiant :* $x^{p-5} \equiv 1(\bmod p)$
   a) *Montrer que x et p sont premiers entre eux.*
   b) *Montrer que* $x^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$
   c) *Vérifier que :* $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$
   d) *En déduire que :* $x^2 \equiv 1(\bmod p)$
3) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *l'équation :* $x^{62} \equiv 1(\bmod 67)$

Exercice 2 :

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1) a) *Vérifier que 2017 est un nombre premier.*
   b) *Soit* $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tq* $px + y^{p-1} = 2017$
   Vérifier que $p < 2017$ *puis montrer que p ne divise pas y*
   c) *Montrer que* $y^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ *. En déduire que p divise 2016.*
   d) *Montrer que* $p = 7$
2) *Déterminer, selon les valeurs de p, les couples* $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *vérifiant* $px + y^{p-1} = 2017$

Exercice 3 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *tq 173 divise* $a^3 + b^3$ *(173 est un nombre premier)*

1) *Montrer que* $a^{171} \equiv -b^{171} (\bmod 173)$
2) *Montrer que 173 divise a* $\Leftrightarrow$ *173 divise b.*
3) *On suppose que 173 divise a.*
   Montrer que 173 divise $a + b$
4) *On suppose que 173 ne divise pas a*
   a) *Montrer que* $b^{172} \equiv a^{172} (\bmod 173)$
   b) *Montrer que* $a^{171}(a + b) \equiv 0(\bmod 173)$

c) Déduire que 173 divise $a+b$.

5) $(E): x^3+y^3=173(xy+1)$, $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

Soit (x,y) solutions de (E)

On pose $x+y=173k$, $(k\in\mathbb{N}^*)$

a) Vérifier que $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

b) Montrer que $k=1$ puis résoudre (E)

Exercice 4 :

On pose $a_n=\underbrace{33..................3}_{n\ fois}1$, $n\in\mathbb{N}^*$

1) Vérifier que $a_1\wedge a_2=1$

2) Montrer que $3a_n+7=10^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$

3) Montrer que $10^{30k+2}\equiv 7(\mathrm{mod}\,31)$ $\forall k\in\mathbb{N}$

4) Montrer que $3a_{30k+1}\equiv 0(\mathrm{mod}\,31)$ puis déduire que 31 divise $3a_{30k+1}$

5) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, si $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,30)$ alors $a_nx+31y=1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 5 :

1) a) Vérifier que $15\times 3\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $15x\equiv 4(\mathrm{mod}\,11)$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$: $(E): 11x-15y=4$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\wedge 5=1$

Montrer que $n^{4k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ $\forall k\in\mathbb{N}$

3) Soit x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x\equiv y(\mathrm{mod}\,4)$

a) Montrer que $n^x\equiv n^y\,(\mathrm{mod}\,5)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^x\equiv n^y\,(\mathrm{mod}\,10)$

4) Soit $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est solution de (E)

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^x\equiv n^y\,(\mathrm{mod}\,10)$

Exercice 6 :

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par :

$U_0 = 27$
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ U_{n+1} = 3U_n - 4$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+2} \equiv U_n \pmod 8$

   En déduire que pour tout entier naturel n, $U_{2n} \equiv 3 \pmod 8$ et $U_{2n+1} \equiv 5 \pmod 8$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 2U_n = 50 \times 3^n + 4$

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2U_n \equiv 54 \pmod{100}$

   Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de U_n suivant les valeurs de n.

Exercice 7 :

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $U_n = 2^n + 3 \times 7^n + 14^n - 1$

1) a) Calculer U_3

   b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, U_n est pair

   c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (U_n)

   Les entiers 2,3,5 et 7 appartiennent-ils à E ?

2) Soit p un entier premier strictement supérieur à 7.

   Soient m et n deux entiers naturels tels que $14 = mn$

   a) Quelles sont les valeurs possibles de m ?

   b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n \pmod p$

   c) En déduire que $14U_{p-2} \equiv 0 \pmod p$

   d) L'entier p appartient-il à (E) ?

   e) Déterminer E.

Exercice 8 :

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$U_{n+1} = 10U_n + 21$.

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3

2) a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3U_n = 10^{n+1} - 7$

b) Montrer que U_2 est un nombre premier.

3) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

4) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3U_n \equiv 4-(-1)^n \pmod{11}$

b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$ U_n n'est pas divisible par 11.

5) a) Démontrer que $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

b) En déduire $\forall k \in \mathbb{N}$ U_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 9 :

1) a) Vérifier que $35 \times 11 \equiv 1 \pmod{96}$

b) Résoudre dans ℤ² alors $35x - 96y = 1$

2) On pose $(E): x^{35} \equiv 2 \pmod{97}$, $\forall x \in \mathbb{N}$

Soit x une solution de (E)

a) Montrer que 97 est nombre premier et que $97 \wedge x = 1$

b) Montrer que $x^{96} \equiv 1 \pmod{97}$

c) Montrer que $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$

Etudier la réciproque

d) Montrer que les solutions de (E) sont $x = 11 + 97k$, $k \in \mathbb{N}$

Exercice 10 :

Soit (U_n) une suite géométrique strictement croissante de raison q et de premier terme $U_0 > 0$ tels que $LnU_1 + LnU_2 = 11$ et $U_1 + U_2 = e^4(1+e^3)$

1) Calculer U_1 et U_2 . En déduire q.

2) On donne $q = e^3$ et $U_1 = e^4$

a) Exprimer U_n en fonction de n.

b) On pose $S_n = LnU_0 + LnU_1 + ... + LnU_n$

Calculer S_n en fonction de n.

3) On pose $a_n = n + 3$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $2S_n \wedge a_n = a_n \wedge 14$

b) Déterminer les valeurs de $2S_n \wedge a_n$

c) Déterminer les valeurs de n tels que $2S_n \wedge a_n = 7$

4) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^n par 7

5) On pose $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

Déterminer les valeurs de n tels que : $\begin{cases} b_n \equiv 0 \pmod 7 \\ \text{et} \\ n \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

6) Montrer que $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0 \pmod 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 11 :

Soit $n \in$ IN*. On pose $A = n^2 + n + 1$ et $B = n^2 - n + 1$

a) Montrer que $n \wedge (n^2 + 1) = 1$

b) Calculer $A + B$ et $A - B$ et en déduire les valeurs possibles de $A \wedge B$

c) Montrer que $\forall\ n \in$ IN* , $A \equiv 1\ (mod 2)$ et en déduire que $PGCD(A, B) = 1$

Exercice 12 :

Montrer que $7/x$ et $7/y \quad \Leftrightarrow \quad 7/x^2 + y^2$

Exercice 13 :

On donne n et c deux entiers naturels non nuls, le but de l'exercice est de comparer $(cn) \wedge (2n + 1)$ à $c \wedge (2n + 1)$ et de déterminer selon n le $PGCD$ des deux entiers $A = 3n$ et $B = 2n + 1$

1) Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2) Montrer que $(cn) \wedge (2n + 1) = c \wedge (2n + 1)$
3) En déduire que $A \wedge B = 3 \wedge (2n + 1)$
4) Déterminer $3 \wedge (2n + 1)$ selon les valeurs de n en utilisant par exemple les 3 valeurs possibles du reste dans la division euclidienne de n par 3

Exercice 14 :

Soit n un entier naturel non nul.

1) On considère l'équation $(E): 3x + 7y = 10^{2n}$, avec x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier que $(5 + 7k; -2 - 3k)$,$(k \in \mathbb{Z})$ *, sont les solutions de l'équation* $3x + 7y = 1$.

b) Déterminer l'ensemble des couples (x,y) solutions de (E)

2) On considère l'équation (F): $3x^2+7y^2=10^{2n}$, avec x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier que $100 \equiv 2(mod7)$

b) Déduire que si (x,y) est solution de (F) alors $3x^2 \equiv 2^n(mod7)$

c) Etudier suivant les valeurs de x le reste modulo 7 de $3x^2$

d) Etudier suivant n le reste modulo 7 de 2^n

e) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 15 :

1) Soient p et q deux entiers naturels premiers distincts. Montrer que $p\times q$ divise $p^{q-1}+q^{p-1}-1$

2) Soit un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que $p^2-1\equiv 0(mod24)$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$. Montrer que si n non premier alors 2^n-1 et non premier.

4) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. $d=a\wedge b$ et $n=a\vee b$

tq $\begin{cases} m=d^2 \\ m+d=156 \\ a\geq b \end{cases}$

a) Montrer que $d=12$

b) Trouver les couples (a,b) vérifiant le système (S)

5) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} a\wedge b=56 \\ a\vee b=108 \end{cases}$

6) a) Décomposer 319 en facteurs premiers.

b) Démontrer que si x et y deux entiers naturels premiers entre eux il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.

7) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2(a\vee b) \end{cases}$

Exercice 16 :

1) Soit $n\in\mathbb{Z}$ et $a,b\in\mathbb{N}^*$

a) Montrer que $\left.\begin{array}{l} n\equiv 0(\bmod a) \\ n\equiv 0(\bmod b) \end{array}\right\} \Leftrightarrow n\equiv 0(\bmod a\vee b)$

b) Déduire que si $a\wedge b=1$ alors : $\left.\begin{array}{l} n\equiv 0(\bmod a) \\ n\equiv 0(\bmod b) \end{array}\right\} \Leftrightarrow n\equiv 0(\bmod ab)$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 3x\equiv 2(mod7) \\ 2x\equiv 1(mod13) \end{cases}$ $\begin{cases} 7x\equiv 3(mod5) \\ 2x\equiv 1(mod3) \end{cases}$

Exercice 17 :

1) a) Vérifier que $3\times 2\equiv -1(\text{mod}\,7)$

En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $2x\equiv 28(\text{mod}\,7)$

b) Résoudre alors dans Z×Z l'équation $2x-7y=28$

2) Soit dans Z×Z le système (S) suivant :

$$\begin{cases}2x-7y=28\\ y-1\equiv x^2(mod 7)\end{cases}$$

Résoudre dans Z×Z le système (S)

Exercice 18 :

1) a) Démontrer que 193 est un nombre premier.

b) Soit a un entier naturel inférieur à 192.

Montrer que $a^{193}\equiv 1(mod 193)$

c) Vérifier que $(155+192k)83-192(67+83k)=1\ \ \forall k\in Z$

2) On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :

A tout entier a de A , f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193.

A tout entier a de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrer que $g(f(a))\equiv a^{83\times 155}(mod 193)$

En déduire que pour tout $a\ \in$ A on a : $g(f(a))=a$

b) Déterminer fog

Exercice 19 :

1) a) Vérifier que 1979 est premier.

b) Résoudre dans Z l'équation $2x\equiv 1(mod 1979)$

2) On considère l'équation $(E): x^2-x+494\equiv 0(mod 1979)$

a) Soit x solution de (E) dans Z, déterminer le reste de $(x-990)^2$ par 1979.

b) En déduire les solutions de l'équation (E) dans Z.