Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°31** (Divisibilité dans $\mathbb{Z}$)	$4^{ème}$ Math Mr Jellali

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. 9 est le chiffre des unités de 7^{2017}.
2. Pour tout entier naturel n , $n^{38}+2n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,19)$ si et seulement si $n\equiv 18(\mathrm{mod}\,19)$.
3. Pour tout entier naturel n , $(n+1)^{13}-\left(n^{13}+1\right)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 13)$.
4. $3^{2010}+3^{2011}+3^{2012}\equiv 2(\mathrm{mod}\,10)$.
5. Le reste de la division euclidienne de 8^{2014} par 11 est 3.
6. Soit x un entier. Si $\begin{cases} x\equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 10) \\ x\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 14)\end{cases}$ alors $x\equiv 18\ (\mathrm{mod}\ 70)$.
7. Pour tout entier x, $x(2x+1)\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$, si et seulement si, $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$.
8. Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{3}\left(5\times 4^{n}-2\right)$ est un entier.
9. Pour tout entier naturel n, $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est un multiple de 17.
10. Pour tout entier x, $x^{2}-2x+1\equiv 9\ (\mathrm{mod}\,10)$, si et seulement si, $x\equiv 4\ (\mathrm{mod}\,10)$.

Exercice 2

1)a) Déterminer suivant l'entier naturel n les restes possibles de 5^{n} modulo 6.

b) En déduire le reste modulo 6 de l'entier 2009^{2008}.

2)a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$, $5^{n}\equiv 2^{n}+3^{n}(\mathrm{mod}\,6)$.

b) En déduire que pour tout $p\in\mathbb{N}^{*}$, $B=2005^{p}+2006^{2009}+2007^{2009}$ est divisible par 6.

Exercice 3

On considère la suite (V_n) d'entiers naturels définie par $V_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}=10V_n+21$.

① Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3V_n=10^{n+1}-7$.

② a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3V_n\equiv 4-(-1)^{n}\ (\mathrm{mod}\,11)$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 11 de V_n.

③ a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 13 de 10^{n}.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $V_n\equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$.

Exercice 4

Soit p un nombre premier tel que $p>2$ et $E_p=\left\{n\in\mathbb{N}\ ,\ n^{2}+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)\right\}$.

① Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de p par 4.

② Déterminer E_5.

③ On pose $p=3+4k$, $k\in\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $n^{2}+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

a) Vérifier que $\left(n^{2}\right)^{1+2k}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$.

b) Montrer que n et p sont premiers entre eux.

c) En déduire que $\left(n^{2}\right)^{1+2k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

d) Déterminer E_p.