Divisibilité Dans Z

Identité de Bezout

Prof : Mr Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul

$4^{ème}$

Série d'exercices N°.....

Exercice 1 :

Montrer par deux méthodes que pour tout entier naturel n non nul on a: $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13

Exercice 2 :

1) Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de 2^k modulo 7.
2) En déduire le reste de 247^{349} de la division Euclidienne de par 7

Exercice 3 :

1) Déterminer les restes de la division par 13 des différentes puissances de 3 à exposants entiers naturels.
2) Déterminer les entiers naturels n tel que : $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ soit divisible par 13.

Exercice 4 :

1) déterminer le plus petit entier naturel non nul p tel que: $7^p \equiv 1 \pmod{10}$.
2) Trouver le chiffre des unités de $A = 1997^{1999^{2001}}$.

Exercice 5:

Soit $x \in \mathbb{Z}$, montrer que $x^3 \equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 3$

Quelle est le reste de la division Euclidienne de 245193691242752^{385} par 9

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$

1) a) $2x \equiv 4[6]$ b) $2x \equiv 5[7]$ c) $2x \equiv 3[7]$ d) $x^2 \equiv -6[7]$

2) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[7]$ 3) $x^2 - 3x + 2 \equiv 0[6]$

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $xy \equiv 1[6]$ (En pourra raisonner sur le restes modulo 6 de x et y)

Exercice 8:

Soit la suite u d'entiers naturels définie par : $u_0 = 14$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 5u_n - 6$

a/ Calculer u_1 , u_2 et u_3

b/ Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$

c/ En déduire que pour tout p de IN $u_{2p} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2p+1} \equiv 0 \pmod 4$

d/ Montrer par récurrence que pour tout n de IN , $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$

e/ Déterminer les deux derniers chiffres de u_n suivant les valeurs de n

Exercice 9 :

1/ a) Soit n un entier naturel. Déterminer en fonction de n le reste modulo 7 de 2^n et 3^n.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n + 3^n$ est divisible par 7.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre :
$A = (10)^{2007} + (353)^{2007} + (225)^{2007}$.

2/ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 7$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 11 \times 2^n$

b) En déduire suivant les valeurs de n les restes de la division par 7 du terme général u_n de cette suite.

c) Quel est le reste de la division

Prof: M' Ben Brahim
Lycée Pilote Nabeul

4ème Math

Série d'exercices N°.4

Exercice 1 :

Soit $A = 3n+1$; $B = 5n-1$ avec n étant un entier non nul

1/ Déterminer les valeurs passibles de $A \wedge B$.

2/ Déterminer l'ensemble des entiers n tel que : $A \wedge B = 8$

Exercice 2 :

1/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 11y = 4$

2/ Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3u \equiv 1 \pmod{5} \\ 7u \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$

Exercice 3 :

1) Soit a ,b, q et r trois entiers tels que a =b q +r . Montrer que $a \wedge b = b \wedge r$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $5x - 3y = 2$

b) Résoudre alors $(S) : \begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$

Exercice 4 :

1/ a) Montrer que : Si a est premier avec b et c alors a est premier avec bc (Indication Utiliser théorème de Bézout)

b) La réciproque est-elle vraie ?

2/ En déduire que si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^n = 1$; $n \geq 1$

3/ Montrer que $a \wedge b = 1$ alors $a^n \wedge b^m = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$

4/ Montrer que : Si $a \wedge b = c$ alors $a^n \wedge b^n = c^n$

Exercice 5 :

1/ On considère l'équation (E) : $91x + 10y = 1$ ou x et y sont des entiers relatifs

a) Enoncer le théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E)

b) Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$

c) Résoudre (E')

2/ Montrer que les nombres $A_n = 3^{2n} - 1$, ou n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8

3/ On considère l'équation $(E'') : A_3 x + A_2 y = 3296$

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'')

b) Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels solution de (E'').Le déterminer

Exercice 6 :

Soit p **un nombre premier** donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x; y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation : $(E) : x^2 + y^2 = p^2$

1/ On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution. On suppose dans la suite que p est différent de 2 et que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E)

2/ Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux

a - Montrer que x et y sont de parités différentes

b - Montrer que x et y ne sont

c - En déduire que x et

3/ On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls,c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ ou u et v sont deux entiers naturels strictement positifs

a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|; 2uv\right)$ est solution de l'équation (E)

b. Donner une solution de l'équation (E),lorsque $p = 13$

4/ On se propose enfin de vérifier sur deux exemples , que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés

a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?

b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs

Exercice 7 :

1/ Soit (E) l'équation : $109x - 226y = 1$ ou x et y sont des entiers relatifs

a) Déterminer PGCD (109 ; 226). Que peut-on en déduire pour l'équation (E) ?

b) Démontrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme : $(141 + 226k \; ; \; 68 + 109k)$ ou k est un entier relatif

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier non nul e tels que $109d = 1 + 226e$ (On précisera les valeurs des entiers d et e)

2/ Démontrer que 227 est un nombre premier

3/ On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a inférieurs ou égaux à 226

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227

a) Vérifier que $g(f(0)) = 0$

b) Démontrer : pour tout a non nul appartient à A, $a^{226} \equiv 1[227]$

c) En utilisant le résultat de la question 1) b/ en déduire que : pour tout a non nul appartient à A, $g[f(a)] = a$

Que peut-on dire de $f[g(a)]$?

Exercice 8: (Bac 2007. 2008)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 3x - 8y = 5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2)

a) Soit n, x et y trois entiers tels que : $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système $(S)\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.

3)

a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par

Exercice 3 :

Partie A:

On considère l'équation (E) $5x-26y=2$, avec x et y entiers relatifs.

1) Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x \wedge y = 1$ ou $x \wedge y = 2$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x-26y=2$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E) tel que x et y soient premier entre eux.

Partie B :

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

***a* et *b* étant deux entiers naturels donnés**, on associe à tout entier n de Ω le reste r de la division euclidienne de $(an+b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a=2$ et $b=3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on associe à P l'entier $n=15$;

étape 2 : le reste de la division de $2\times 15+3=33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

I. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a=13$.
Peut-on utiliser le chiffre a =13 pour coder des messages.

II. Dans cette partie de l'exercice, on prend $a=5$ et $b=2$.

1) On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n+2$ et $5p+2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n-p$ est un multiple de 26. En déduire que $n=p$. Que peut-on conclure

2) On désire coder le mot « LPN ». Recopier et compléter la grille de ci-dessous :

Lettre	L	P	N
n			
$5n+2$			
r			
Lettre			

Conclure

3) On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n-26y=2$, où y est un entier.

b. Décoder alors la lettre E.

Exercice 9:

Partie A:

1) $E : 5x - 26y = 2$ E

Soit $d = x \wedge y$ alors $d | x$ et $d | y$ alors $d | 5x - 26y$ alors $d | 2$ alors $d \in \{1, 2\}$

2) On a $(-10, -2)$ est une solution particulière de (E)

$5x - 26y = 2 \Leftrightarrow 5x - 26y = 5\times(-10) - 26(-2) \Leftrightarrow 5(x+10) = 26(y+2)$

On a: $26 | 5(x+10)$ et $26 \wedge 15 = 1$

Alors d'après la lemme de Gauss on a: $26 | x+10$ d'où $x + 10 = 26k$ d'où $x = -10 + 26k \quad k \in \mathbb{Z}$

Pour $x = -10 + 26k, k \in \mathbb{Z}$

On a: $5 \times 26k = 26(y+2)$ alors $y + 2 = 5k$ alors $y = -2 + 5k \quad , k \in \mathbb{Z}$

Vérification pour $x = -10 + 26k$ et $y = -2 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$

L'équation (E) est vraie.

Conclusion $S_{\mathbb{Z}} = \{(-10+26k, -2+5k), k \in \mathbb{Z}\}$

3) On a d'après 1) $x \wedge y = 1$ ou $x \wedge y = 2$

Si $x \wedge y = 2$ alors $x \equiv 0[2]$ et $y \equiv 0[2]$

alors $-10 + 26k \equiv 0[2]$ et $-2 + 5k \equiv 0[2]$

vraie $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\Big|$ $\Rightarrow 5k \equiv 0[2]$ $\Rightarrow k \equiv 0[2]$

Alors $k \equiv 0[2]$

Vérification Pour $k \equiv 0[2]$, on a $26k \equiv 0[2]$ et $5h \equiv 0[2]$

$\Rightarrow 26k - 10 \equiv 0[2]$ et $5k - 2 \equiv 0[2]$

$\Rightarrow x \equiv 0[2]$ et $y \equiv 0[2]$

Conclusion: $x \wedge y = 2$ sig $k \equiv 0[2]$

D'où $x \wedge y = 1$ signifie $k \equiv 1[2]$ sig il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 1 + 2k'$

Signifie $x = 52k' + 16$ et $y = 3 + 10k', k' \in \mathbb{Z}$

Partie B: Pour a = 13 et b quelconque

1) • à la lettre A on associé $n = 0$

On a $13 \times 0 + b = b$

Soit r le reste de la division euclidienne de b par 26.

On a associe à A la lettre qui correspond à r.

• à la lettre C on associé $n = 2$

On a $13 \times 2 + b = 26 + b$

Le reste de la division euclidienne de 26 + b par 26 est aussi r.

Alors A et C sont codés par la même lettre.

Non

2) Pour a = 5, b = 2 on a :

$\left.\begin{array}{l} 5n + 2 \equiv r[26] \\ 5p + 2 \equiv r[26] \end{array}\right\} \Rightarrow 5n + 2 \equiv 5p + 2[26] \Rightarrow 5(n-p) \equiv 0[26] \Rightarrow 5(n-p) = 26h, h \in \mathbb{Z}$

On a: $26 | 5(n-p)$ et $26 \wedge 5 = 1$ alors d'après la lemme de Gauss $26 | n - p$ (1)

Or $\left.\begin{array}{l} 0 \le n \le 25 \\ -25 \le -p \le 0 \end{array}\right\}$ alors $-25 \le n - p \le 25$ (2)

D'après (1) et (2) on a : $n - p = 0 \Rightarrow n = p$

On peut utiliser les entiers a = 5 et b = 2 pour coder des messages.

2)

Lettre	L	P	N
N	11	15	13
5n + 2	57	77	67
R	5	25	15
lettre	F	Z	P

LPN est codé par FZP

3) Soit $\overline{E}$ la lettre codé par E et soit n l'entier qui correspond à $\overline{E}$.

On a 4 correspond à l'entier E.

D'où $5n + 2 \equiv 4[26]$

D'où il existe $y \in \mathbb{Z}$ tq $5n + 2 = 4 + 25y$ d'où $5n - 26y = 2$

On a d'après partie A)2) $r = -10 + 26k, k \in \mathbb{Z}$

Or $0 \le r \le 25$

$\Rightarrow 0 \le -10 + 26k \le 25 \Rightarrow 10 \le 26k \le 35$

$\Rightarrow \dfrac{10}{26} \le k \le \dfrac{36}{25} \Rightarrow k = 1$ car $k \in \mathbb{Z}$

D'où n = 16

Alors Q est la lettre codée par E.

Ex 1

1/ Soit $d = a \wedge b$ et $d' = b \wedge r$.

Montrons que $d = d'$

* on a : $d = a \wedge b$

$\Rightarrow d \mid a$ et $d \mid b$

$\Rightarrow d \mid (a - bq)$ et $d \mid b$

$\Rightarrow d \mid r$ et $d \mid b$

$\Rightarrow d \mid r \wedge b$

$\Rightarrow d \mid d'$

* on a : $d' = b \wedge r \Rightarrow d' \mid b$ et $d' \mid r$

$\Rightarrow d' \mid b$ et $d' \mid bq + r$

$\Rightarrow d' \mid b$ et $d' \mid a$

$\Rightarrow d' \mid b \wedge a$

$\Rightarrow d' \mid d$

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l} d \mid d' \\ d' \mid d \\ \text{et } d > 0,\ d' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d = d'$$

2/ (E) : $5x - 3y = 2$

$5 \times 1 - 3 \times 1 = 2$

donc $(1, 1)$ est une solution de (E)

$5x - 3y = 5 \times 1 - 3 \times 1$

$\Rightarrow 5(x - 1) = 3(y - 1)$

on $5 \mid 3(y - 1)$

et $5 \wedge 3 = 1$ $\Rightarrow 5 \mid y - 1$

$\Rightarrow y - 1 = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \underline{y = 1 + 5k}$

ainsi $5(x - 1) = 3 \times 5k$

$\Rightarrow x - 1 = 3k$

$\Rightarrow \underline{x = 1 + 3k}$

Réciproquement : $5 \times (1 + 3k) - 3(1 + 5k) = 5 + 15k - 3 - 15k = 2$

$1 + 5k) \,;\, k \in \mathbb{Z} \}$.

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+3k \\ y = 1+5k \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$

$x \wedge y = 2 \iff (1+3k) \wedge (1+5k) = 2$

$\iff (1+3k) \wedge ((1+3k)+2k) = 2$

$\iff (1+3k) \wedge 2k = 2$

$\iff (2k+(1+k)) \wedge 2k = 2$

$\iff (1+k) \wedge 2k = 2$

$\iff (1+k) \wedge (2(k+1)-2) = 2$

$\iff (1+k) \wedge (-2) = 2$

$\iff 1+k \equiv 0 \ (2)$

$\iff 1+k = 2k' \quad ; k' \in \mathbb{Z}$

$\iff \underline{k = 2k'-1}$

d'où $\begin{cases} x = 1+3(2k'-1) \\ y = 1+5(2k'-1) \end{cases} ; k' \in \mathbb{Z}$

$\iff \begin{cases} x = 6k'-2 \\ y = 10k'-4 \end{cases} ; k' \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(6k'-2 \,;\, 10k'-4) \,;\, k' \in \mathbb{Z}\}.$

Ex 3

1/ a) $91x - 10y = 1 \quad ; (x,y) \in \mathbb{Z}^2$

a) Th de Bezout :

Si a et b premiers entre eux, il existe $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ax+by = 1$

Théorème :

Soit l'éq $ax+by=c$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$

Soit $d = a \wedge b$

(E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2 \iff d \mid c$

b/ on a : $91\times$ [illegible]

alors $(1, -9)$ est une sol de (E)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{on a : } 9\times 1 + 10\times 38 = 412 \\ \text{alors } (1, 38) \text{ est une sol de } (E') \end{array} \right\}$

– on a : $91\times 1 + 10\times(-9) = 1$

$\Rightarrow 91\times(412) + 10(-9\times 412) = 412$

$\Rightarrow 91\times 412 + 10\times(-3708) = 412$

d'où $(412, -3708)$ est une solution de (E')

0 $\quad 91x + 10y = 412$

$91x + 10y = 91\times 412 + 10\times(-3708)$

$\Rightarrow 91(x-412) = 10(-y-3708)$

$91 \mid 10(-y-3708)$

et $91 \wedge 10 = 1$ $\quad \Rightarrow 91 \mid -y - 3708$

$\Rightarrow -y - 3708 = 91k$

$\Rightarrow \underline{y = -91k - 3708}$, avec $k\in\mathbb{Z}$

ainsi $91(x-412) = 10(91k)$

$\Rightarrow x - 412 = 10k$

$\Rightarrow x = 10k + 412$; avec $k\in\mathbb{Z}$

<u>conclusion</u> :

$\begin{cases} x = 10k + 412 \\ y = -91k - 3708 \end{cases}$

<u>Réciproquement</u> :

$91\times(10k+412) + 10(-91k-3708) = 910k + 37492 - 910k - 37080 = 412$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(10k+412 ; -91k-3708) ; k\in\mathbb{Z}\}$

2/ $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8 $(n\in\mathbb{N}^*)$

on a $3 \equiv 3 \ (8)$

$\Rightarrow 3^2 \equiv 1 \ (8)$

$\Rightarrow (3^2)^n \equiv 1^n \ (8)$

$\Rightarrow 3^{2n} \equiv 1 \ (8)$

$\Rightarrow 3^{2n} - 1 \equiv 0 \ (8)$

$\Rightarrow A_n \equiv 0 \ (8)$

alors A_n est divisible par 8.

3/ a) (E'') : $A_3 x + A_2 y = 3296$

or $A_3 = 3^6 - 1 = 728$; $A_2 = 3^4 - 1 = 80$

$\Rightarrow (E'')$: $728x + 80y = 3296$

$\Leftrightarrow (E')$ $91x + 10y = 412$

d'où $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(10k+412 ; -91k-3708) ; k \in \mathbb{Z}\}$

b/ $\begin{cases} x = 412 + 10k \\ y = -3708 - 91k \\ \text{et } x \geq 0 ; y \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 412 + 10k \geq 0 \\ -3708 - 91k \geq 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-412}{10} \\ k \leq \frac{-3708}{91} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -41,2 \leq k \leq -40,7 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

d'où $\boxed{k = -41}$

d'où $\begin{cases} x = 412 + 10 \times (-41) = 2 \\ y = -3708 - 91 \times (-41) = 23 \end{cases}$

d'où $(2, 23)$ est l'unique solution dans $\mathbb{N}^2$