**Exercice 1 (3 points)**

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

1) Le quotient de (− 23) par (−5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 (\text{mod } 12)$.

4) $x^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$ équivaut à $x \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$.

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 (\text{mod } 4) \\ x \equiv 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \ (\text{mod } 20)$.

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$.

---

**7)** Soit x un entier.

Si $\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 4\ ) \\ x \equiv 2 \ (\ mod\ 6) \end{cases}$ alors

a) $x \equiv 2 \ (mod\ 24\ )$ , b) $x \equiv 2 \ (mod\ 12\ )$

c) $x \equiv 1 \ (mod\ 6\ )$

**8)** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points A ( 31, − 50 ) et B (−21, 34 ). Le nombre des points de coordonnées entières appartenant au segment [AB] est :

a)5 points b) 3 points c) aucun point

**Exercice 2:**

Déterminer les restes modulo 9 de $2^n$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5,6 \}$

b)Soit $n \in$ IN et r le reste dans la division euclidienne de n par 6.

Vérifier que $2^n \equiv 2^r$(modulo9)

c)En déduire qu'il existe k $\in$IN tel que pour tout n de IN on a :$2^{6n} = 9k+1$

2)Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{18}$ par 19

3)En utilisant les questions précédentes, montrer que $2^{2^{6n+2}} + 3$ est un multiple de 19

4)a) Déterminer tous les entiers naturels qui divisent 108.

b) Déterminer tous les couples (x ;y) d'entiers naturels avec x ≤ y dont le PGCD est strictement compris entre 10 et 15 et qui vérifient

PPCM(x ;y) - 3PGCD(x ;y) = 108.

**Exercice 3:**

Pour chacune des questions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

**1)** « l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation 12 x − 5 y = 3 est l'ensemble des couples (4 + 10 k ; 9 + 24 k) où k ∈ Z ».

**2)**Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

« Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier M − N est aussi divisible par 27 ».

3) « Pour tout entier naturel n non nul, n et 2 n + 1 sont premiers entre eux. »

**Exercice 5 :**

Résoudre dans Z l'équation 8x-15y=2.

On pourra remarquer que (4 ; 2) est une solution de cette équation.

**Exercice 6:**

a)Déterminer PGCD(-60, 100)

b)Donner PGCD(455,312) et PPCM(455 ;312)

**Exercice 7:**

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, 3n+2 et 5n+3 sont premiers entre eux

2) Déduire tous les entiers naturels n tel que 3n+2 divise 11(5n+3)

3)Démontrer dans chaque cas que pour tout entier n, les entiers a et b sont premiers entre eux.

a) a = n + 5 et b = 2n + 9

b) a = 15n + 8 et b = 21n+11

**Exercice 8** :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls

1)a- Démontrer que :

PGCD (a ; b) divise PGCD (3a+2b ; 7a+5b).

b- Démontrer que :

PGCD (3a+2b ; 7a+5b) divise PGCD (a ; b).

c-Conclure.

2) Soit m, n, r, s quartes entiers relatifs ; Démontrer que qi ms-nr=1, alors PGCD (ma+nb ; ra+sb)= PGCD (a ; b).

**Exercice 9:**

**1)** Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

**2)** Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

**3)**Soit (S) $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$

Déterminer l'ensemble des solutions de (S)

**Exercice 11**

1)Résoudre dans Z x Z l'équation : $2x+3y=5$

2)Dans la suite les âges sont exprimés en années.
En 2009, un père, dont l'âge n est compris entre 50 et 55, a deux fils A et B d'âges respectifs a et b.
On suppose que :
En 2001, l'âge du père était le double de l'âge de fils A.
En 2006, l'âge du père dépassait de trois ans le triple de l'âge du fils B.

a)Montrer que n, a et b vérifient : $\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$

b)En déduire que les âges n, a et b du père et de ses fils **(TN 2009 SC INF)**

**Exercice 12:**

1)Soit dans ZxZ l'équation(E) : $4x+5y=7$

a)Vérifier que (-2, 3) est une solution de (E)

b)Résoudre l'équation (E)

2)Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ;
on considère les plans P et Q d'équations respectives : $x+6y-z-8=0$ et $3x-y+z+1=0$

a)Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D.

b)Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points de D dont les coordonnées sont des entiers

**Exercice 13:**

**1)a)** Quel est le reste de la division euclidienne de $6^{10}$ par 11 ? Justifier.

**b)** Quel est le reste de la division euclidienne de $6^4$ par 5 ? Justifier.

**c)**En déduire que $6^{40} \equiv 1$ [11] et que $6^{40} \equiv 1$ [5].

**d)** Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

**2)** Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

**a)**Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

**b)** Montrer que l'équation (E′) $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

**c)** Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E′).

**d)** Résoudre l'équation (E′).
En déduire qu'il existe un unique naturel $x_0$ inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1$ [40].

**3)** Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b$ [55] et si $a^{40} \equiv 1$ [55], alors $b^{33} \equiv a$ [55].

**Exercice 15:**

Soit p un entier et n un entier naturel non nul. On pose $S=1+p+p^2+...+p^{n-1}$.

1)a)Vérifier que : $(1-p)S=1-p^n$.

b)En déduire que $(1-p,1)$ est une solution particulière de (E): $Sx+p^ny=1$

2)Application :On prend n=p=3.

a)Résoudre dans Z² l'équation (E') : $13x+27y=1$

b)En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E'') : $13x+27y=2$

**Exercice 16:**

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble W = {0 ; 1 ; 2 ; ... ; 24 ; 25} selon le tableau ci-dessous :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |

| S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de W le reste de la division euclidienne de (a n + b) par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.
Exemple : pour coder la lettre P avec a = 2 et b = 3, on procède de la manière suivante :
étape 1 : on lui associe l'entier n = 15.
étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.
étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

**1.** Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend a = 0 ?

**2.** Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit a = 13.

**3.** Dans toute la suite de l'exercice, on prend a = 5 et b = 2.

**a.** On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p.
Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que n = p.

**b.** Coder le mot AMI.

**4.** On se propose de décoder la lettre E.

**a.** Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de W tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

**b.** On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

A. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

B. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

C. En déduire qu'il existe un unique couple

(x ; y) solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.
**c.** Décoder alors la lettre E.

**Exercice:18**

Les questions 1) , 2) et 3) sont indépendantes :
**1)** a) Déterminer tous les entiers naturels qui divisent 72.
b) Déterminer tous les couples (x ;y) d'entiers naturels avec $x \leq y$ dont le PGCD est strictement compris entre 30 et 40 et qui vérifient PPCM(x ;y) - 4PGCD(x ;y) = 72.
**2)** a) Montrer que Si pgcd( a,10) = 1 alors $a \equiv 1\ [10]$ ou $a \equiv 3\ [10]$ ou $a \equiv 7\ [10]$ ou $a \equiv 9\ [10]$
b) Déduire alors que Si pgcd ( a, 10) =1 alors $a^4 \equiv 1\ [10]$
**3)** Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \wedge b = 1$.
a)Montrer que a + b et ab sont premiers entre eux.
b) Montrer que a + b et $a^2 - ab + b^2$ sont soit premiers entre eux, soit divisibles par 3.

**Exercice 19 :**

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.
Aucune justification n'est demandée.
1)L'entier 5 est un inverse modulo 6 de :
a) 5 b) -5 c) 1

2)Le reste de la division euclidienne de $2010^{6030}$ par 2011 est :
a)1 b) 2010 c) 2009
( On admet que 2011 est premier)
3)L'entier $2011^{2010}$ admet

a)2011 diviseurs b) 4022 diviseurs c) 2021 diviseurs

4)Soit S la somme des diviseurs entiers naturels de $n = 2011^{2010}$
Le couple ( $2011^{2010}$ , S) est solution de :

a)2011 x – 2010 y = 1 b) 2010x + 2011 y = 1
c) x - y = 2011

**Exercice 20:( 3 points)**

On considère dans Z² l'équation ( E ) :
143x - 195y = 52

1) a/ Déterminer le pgcd de 143 et 195 et en déduire que l'équation ( E ) possède des solutions dans Z².
b/ Sachant que ( -1, -1 ) est une solution particulière de ( E ) résoudre dans Z² l'équation ( E ) en précisant les étapes de la résolution.
2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5
Montrer que pour tout k ∈ IN on a : $n^{4k} \equiv 1\ [5]$
3) x et y sont deux entiers naturels non nuls vérifiant $x \equiv y\ [4]$
a/ Montrer que pour tout n ∈ IN* : $n^x \equiv n^y\ [5]$
b/En déduire que pour tout n de IN* : $n^x \equiv n^y\ [10]$
4) Soit ( x , y ) ∈ $IN^2$ une solution de l'équation ( E ),
Montrer que pour tout n ∈ IN*, $n^x$ et $n^y$ ont le même chiffre des unités.

**Exercice 21 :( 4 points )**

**1)** a/ Déterminer selon n les restes possibles de $2^n$ par 7.
b/ Déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que
$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0\ (mod\ 7\,)$.
c/ Déterminer le reste de la division euclidienne de $2011^{1432^{2012}}$ par 7.
**2)** On considère dans Z², l'équation d'inconnues (x, y),
(E) : 2011 x – 1432 y = 1.
a/ En utilisant l'algorithme d'Euclide , donner une solution particulière ( $x_0$, $y_0$) de (E).
b/ Résoudre alors ( E ).
c/ Résoudre alors dans Z,
$1432\,x \equiv -5\ (mod\ 2011\,)$.