Exercice suite implicite avec correction

Exercice

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{\ln(x)}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats

2.a. Montrer que pour tout $x\in\,]1,+\infty[$ on a $f'(x)=\frac{2\ln(x)-1}{2\sqrt{\ln(x)}^3}$

b. Dresser le tableau de variation de f et tracer (C)

3. Soit n un entier naturel , $n\geq 3$

a. Montrer que l'équation $f(x)=n$ admet deux solutions u_n et v_n tels que $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$

b. Construire u_3 , u_4,u_5, v_3 , v_4 et v_5

c. Montrer que pour tout $n\geq 3$ on a $v_n\geq n$ et déduire la limite de (v_n)

4.a. Montrer que (v_n) est croissante

b. Montrer que pour tout $n\geq 3$ on a $\frac{1}{n^2}<\ln(u_n)<\frac{e}{n^2}$ et déduire la limite de (u_n)

Correction

1. $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=+\infty$. Donc $\Delta_1: x=1$ est une asymptote a (C)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}=0$$

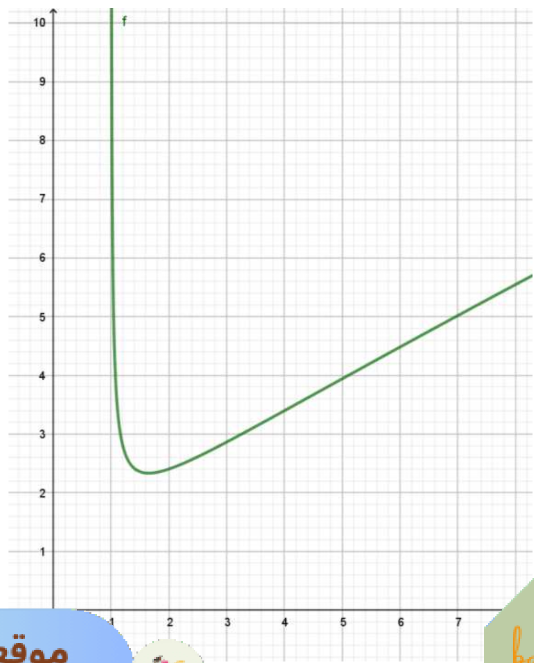
Donc (C) présente une branche parabolique de direction $\left(0,\vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$

2.a. f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x\in\,]1,+\infty[$ on a $f'(x)=\frac{\sqrt{\ln(x)}-\frac{1}{2x\sqrt{ln(x)}}x}{\ln(x)}=\frac{2\ln(x)-1}{2\sqrt{\ln(x)}^3}$

Qui est de signe de $2\ln(x)-1$ sur $]1,+\infty[$

b. $2ln(x)-1=0\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

x	$-\infty$	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'	$-$	|	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$(2e)^{\frac{1}{2}}$	↗ $+\infty$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{\ln(x)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\ln(x)}{x^2}}}=+\infty$$

$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\simeq 1{,}65$ et $(2e)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2e}\simeq 2{,}33$

3.a. D'une part :

f est continue et strictement décroissante sur $]1, \sqrt{e}]$ donc elle réalise une bijection

De $]1, \sqrt{e}]$ sur $f(]1, \sqrt{e}]) = [\sqrt{2e}, +\infty[$ et comme $n \geq 3 > \sqrt{2e}$ alors $n \in [\sqrt{2e}, +\infty[$

Ainsi l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in]1, \sqrt{e}]$

D'autre part :

f est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ donc elle réalise une bijection

De $[\sqrt{e}, +\infty[$ sur $f([\sqrt{e}, +\infty[) = [\sqrt{2e}, +\infty[$ et comme $n \geq 3 > \sqrt{2e}$ alors $n \in [\sqrt{2e}, +\infty[$

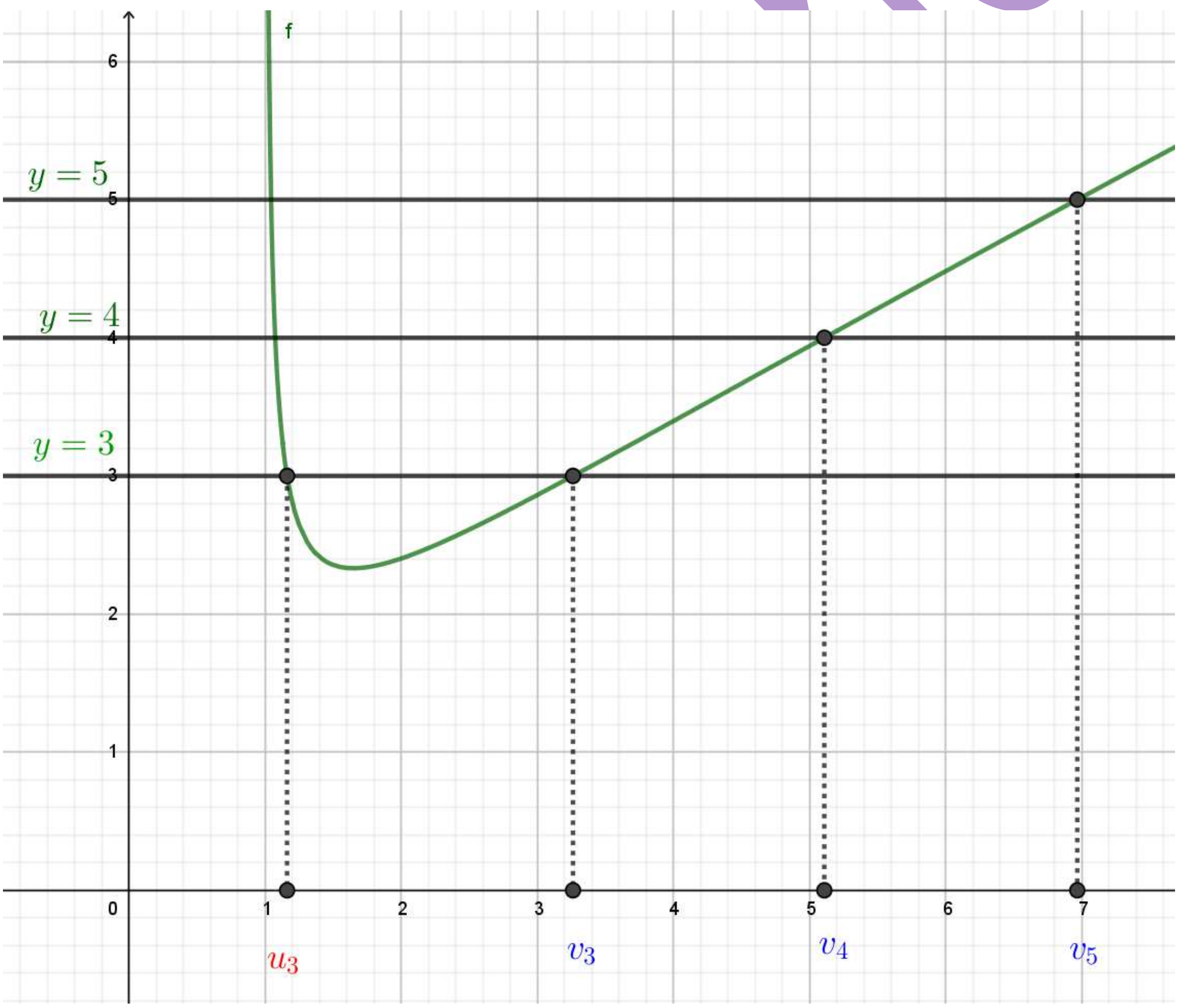
Ainsi l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $v_n \in [\sqrt{e}, +\infty[$

Conclusion : L'équation $f(x) = n$ admet deux solutions u_n et v_n tels que $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

b. u_3 et v_3 sont les abscisses des points d'intersection entre (C) et la droite d'équation $y = 3$

u_4 et v_4 sont les abscisses des points d'intersection entre (C) et la droite d'équation $y = 4$

u_5 et v_5 sont les abscisses des points d'intersection entre (C) et la droite d'équation $y = 5$



c. On a $n \geq 3 > e \Rightarrow \ln(n) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\ln(n)}} \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{\ln(n)}} \leq n \Rightarrow f(n) \leq f(v_n)$

Et comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$

Alors $v_n \geq n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ f est strictement croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$

4.a.On a $n+1 \geq n$ donc $f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$ et comme f est strictement décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$

Alors $u_{n+1} \leq u_n$ ainsi (v_n) est croissante

On a $f(u_n) = n \Rightarrow \frac{u_n}{\sqrt{\ln(u_n)}} = n \Rightarrow u_n = n\sqrt{\ln(u_n)}$ et comme $1 \leq u_n \leq \sqrt{e}$ alors

$1 \leq u_n \leq \sqrt{e} \Rightarrow 1 \leq n\sqrt{\ln(u_n)} \leq \sqrt{e} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \sqrt{\ln(u_n)} \leq \frac{\sqrt{e}}{n} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n^2}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}} \leq u_n \leq e^{\frac{e}{n^2}}$ Or $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n^2} = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n^2}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{e}{n^2}} = 1 \end{cases}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$