Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=4x(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) a) Montrer que pour tout $x\in$ R on $f'(x)=4(e^{-x}-1)(1-x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α autre que 0 sur R et que $\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[$

d) En déduire le signe de $f(x)$

2) a) En utilisant le théorème de Rolle montrer qu'il existe $x_0\in]0,1[$ tel que $f''(x_0)=0$

b) Soit $x\in[0,1]\setminus\{x_0\}$. En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$

c) En déduire que $I(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C)

3)a) Tracer (C)

b) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (C) et les droites d'équations respectives

$x=0$, $x=\alpha$ et $y=0$

Partie B

Soit (u_n) la suite définie sur N par $\begin{cases} u_0<\alpha \\ u_{n+1}=f(u_n)+u_n\end{cases}$

1)a) Montrer que pour tout $n\in$ N ; $u_n<\alpha$

b) Montrer que (u_n) est décroissante

2) Dans cette question on suppose que $u_0>0$ et on pose $g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

a) Montrer que pour tout $x\in$ R on a $g(x)>0$

b) Vérifier que $f(x)+x=4xg(x)$ et montrer que pour tout $n\in$ N on a $u_n\geq 0$

c) Montrer que (u_n) et convergente et déterminer sa limite

3) Dans cette question on suppose que $u_0<0$

a) Montrer que pour tout $n\in$ N on a $u_{n+1}-u_n\leq f(u_n)$

b) Montrer que pour tout $n\in$ N on a $u_n\leq u_0+nf(u_0)$ et en déduire la limite de u_n

Exercice 2

On considère la fonction G définie sur R par $G(x)=\int_0^x\frac{2}{\sqrt{1+ut}^2}dt.$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1.a. Montrer que G est dérivable sur R et calculer $G'(x)$

b. Montrer que G est impaire

2.a. Montrer que $\forall t \geq 0$ on a $\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$

3.a. Montrer que $\forall t \geq 1$ on a $1 + 4t^2 \geq (1+t)^2$

b. En déduire que $\forall x > 1$ on a $G(x) \leq G(1) - \ln(4) + 2\ln(x+1)$

c. Étudier les branches infinies de G

d. Dresser le tableau de variation de G et tracer (C) en précisera la tangente au point O

4.a. Montrer que G est une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera

b. Soit F la fonction réciproque de G .

Montrer que F est dérivable sur R et que $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4F^2(x)}$

c. Montrer que F est deux fois dérivable sur R et que $F''(x) = F(x)$

d. Calculer $F'(0) et F(0)$ puis déduire l'expression de F

On admet que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = y$ est l'ensemble des fonctions définies

Sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ae^{x} + be^{-x}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x + e^{-x}$. et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Dresser le tableau de variation de f

2. Tercer (C)

Partie B

On considère la suite.(u_n) définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1.a. Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $\ln(1+x) \leq x$

b. En déduire que $\forall n \in \mathrm{N}^*$ on a $\ln(1+n) - ln(n) \leq \frac{1}{n}$

2. a. Vérifier que $\forall n \in \mathrm{N}^*$ on a $f\big(\ln(n)\big) = \frac{1}{n} + \ln(n)$

b. Montre que. $\forall n \in \mathrm{N}^*$ $u_n \geq \ln(n)$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$

4.a. Montrer que $\forall k \geq 2$ on a $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{dx}$

b. En déduire que $\forall n \geq 2$ on a $u_n \leq 1 + ln(n-1)$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)}$

Exercice 4

Partie A Soit g la fonction définie sur R par $\begin{cases} g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}. & si\ x \neq 0. \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.a. Montrer que g est paire

b. Étudier la dérivabilité de g en 0 et interprète graphiquement le résultat

2. Montrer que $\forall x \in$ R on a $2g(x) = x^3 g'(x)$

3. Dresser le tableau de variation de g et tracer (C)

Partie B

On considère la fonction f définie sur R par $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t. & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1.a. Montrer que f et impaire

b. On admet que g' est continue sur R . Montrer que $\forall x > 0$ on a $0 \leq \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^3}{2} g(x)$

c. En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

2. Montrer que f est dérivable sur R* et calculer $f'(x)$

3.a. Montrer que $\forall x > 0$ on a $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} x^3 g(x) - \frac{3}{2} \int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t$

b. En déduire que f est croissante sur $]0, +\infty[$

4.a. Montrer que $\forall t \in$ R on a $e^t \geq t+1$

b. En déduire que $\forall x > 1$ on a $f(x) \geq x + \frac{1}{x} - 2$

c. Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et dresser le tableau de variation de f

Exercice 5

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

On définie la fonction f_n définie sur $]1, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x-1) + P_n(x)$ avec $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$

Et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1.a. Étudier le sens de variation de P_n sur $]1, +\infty[$

b. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

c. Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[$ on a $f_n{}'(x) = \frac{x^n}{x-1}$ et donner le tableau de variation de f_n

2.a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n sur $]1, +\infty[$

b. Montrer que (b_n) est décroissante et qu'elle est convergente

3. Tracer (C_2) on donne $1 < b_2 < 1{,}2$

4. Soit p un entier naturel non nul

a. Montrer que $\int_{p}^{p+1} \frac{1}{x} \mathrm{dx} \leq \frac{1}{p}$

b. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $\ln(n+1) \leq P_n(1)$

c. En déduire que $\forall n \geq 2$ on a $f_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 0$ puis Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1$

Exercice 6

Soit n un entier naturel

On considère la fonction f_n définie sur R^* par $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2}$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1.a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$

b. Etudier les branches infinies de (C_n)

2. a. Dresser le tableau de variation de f_n

b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]-\infty, 0[$ une unique solution x_n

c. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $-1 < x_n < -\frac{1}{n}$

4.a. Montrer que $\forall n \in \mathrm{N}^*$ on a $f_{n+1}(x_n) = e^{x_n}$ et en déduire que x_n est convergente

b. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $x_n \geq -\frac{2\ln(n)}{n}$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$

5. Tracer (C_1)

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1.a. Montrer que f est continue a droite en 0

b. Étudier la dérivabilité de f a droite en 0 et interprète le résultat

2. a. Dresser le tableau de variation de f et tracer (C)

b. Calculer le volume du solide S obtenu par rotation de l'arc de (C) sur $[0,1]$ au tour de l'axe des abscisses

3. On considère la fonction F définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \int_{1}^{\frac{1}{\ln(x)}} f(t)\, \mathrm{dt}$

a. Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$

b. Calculer $F(e)$ et en déduire le signe de $F(x)$

4.a. Montrer que $\forall x > 1$ on a $F(x) = \int_{x}^{e} \frac{1}{t^2 \ln t} \mathrm{dt}$

b. Montrer que $\forall\, t > 1$ on a $\ln(t) \leq t - 1$ en déduire que $\forall x \in]1, e[$ on a $F(x) \geq \int_{x}^{e} \frac{1}{e^2(t-1)} \mathrm{dt}$

c. Calculer $\lim\limits_{x \to 1+} F(x)$

5.a. Vérifier que $\forall x > e$ on a $\frac{1}{t^2\ln(t)} \leq \frac{1}{t^2}$

b. Soit l la limite de F en $+\infty$. Montrer que $-\frac{1}{e} \leq l \leq 0$ et donner le tableau de variation de F

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul . On considère la fonction p_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

Partie A

1. Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$

2. a. Dresser le tableau de variation de P_n

b. Montrer que $P_n(1) < 0$

3.a. Vérifier que $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n-1}\right)$

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(2) \geq 0$

4. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[1, +\infty[$ et que $1 < \alpha_n < 2$

Partie B

1. Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $P_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{dt}$

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\int_1^{\alpha_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{dt}$

3. Montrer que $\forall t \geq 1$ on a $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$

4.a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\int_1^{\alpha_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{dt} \geq \frac{n}{2}(\alpha_n - 1)^2$

b. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq \alpha_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2ln(2)}{n}}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(-1) = e^{-1}\ln(2)$ et $f(x) = \int_x^{2x+1} \frac{e^t}{t+1}\mathrm{dt}$ si $x > -1$

1) Montrer que $\forall x > -1$ on a $\int_x^{2x+1} \frac{1}{t+1}\mathrm{dt} = \ln(2)$

2.a. Montrer que $\forall x > -1$ on a ; $e^x\ln(2) \leq f(x) \leq e^{2x+1}\ln(2)$

b. En déduire que f est continue a droite en -1

3. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation du résultat

4.a. Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $\forall x > -1$ on a $f'(x) = \frac{e^x(e^{x+1}-1)}{x+1}$

b. Soit $x > -1$ montrer qu'il existe $c \in [x, 2x+1]$ tel que $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{e^{c}-e^{-1}}{c+1}$

On pourra considérer la fonction $h : \longmapsto \frac{e^{x}-e^{-1}}{x+1}$

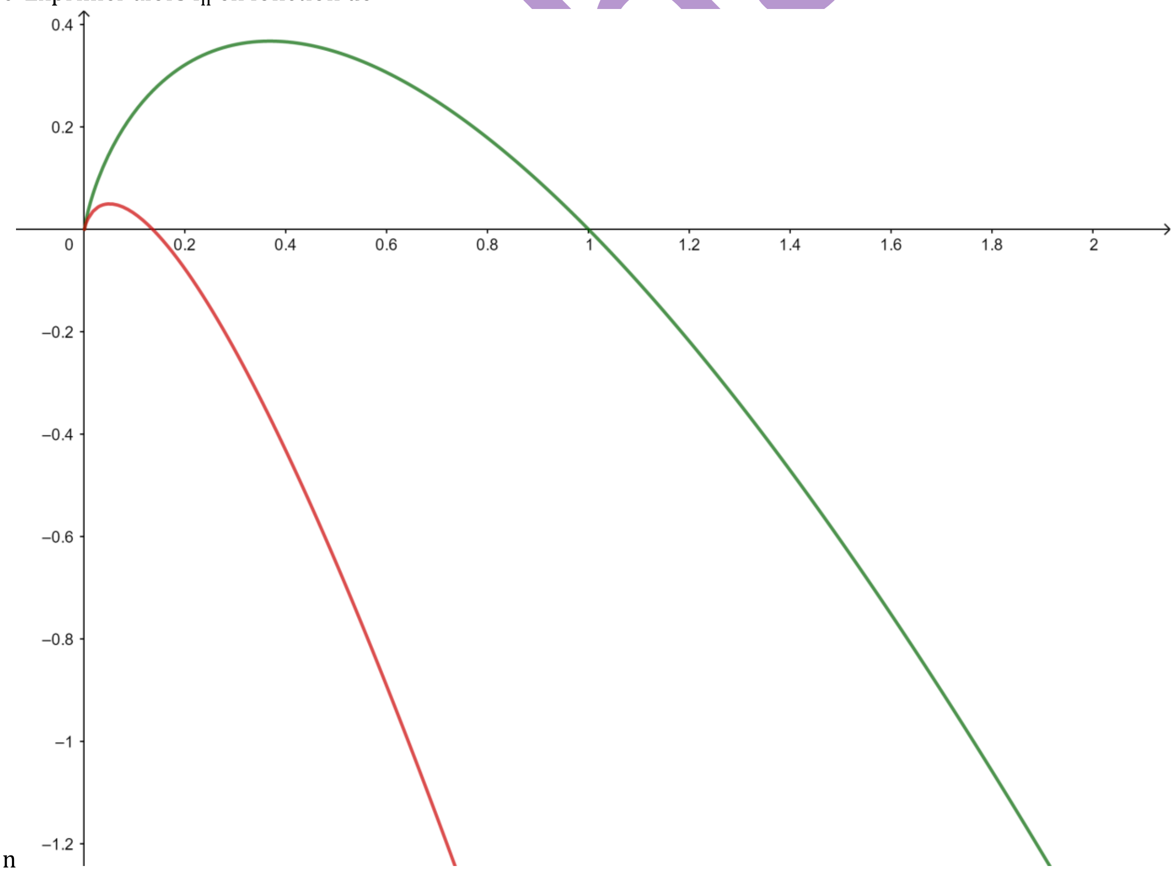
c. Déduire que f est dérivable a droite en -1 et déterminer $f'_d(-1)$

6. Tracer la courbe de f

Exercice 9

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = -nx - x\ln x \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction fn, dans ^{3} un repère orthonormal.
Les courbes (C_0) et (C_2) représentatives des fonctions f_0, et f_2 sont données au-dessous.
1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n a droite en 0
2. a. Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
b. Prouver que le point A_n appartient à la droite d'équation $y = x$.
c. Placer sur la figure en annexe les points A_0 et A_2.
3. a. Démontrer que la courbe (Cn) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté Bn,
b. Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
c. Placer sur la figure en annexe les points B_0 et B_2.
3.a. Construire les points A_1 et B_1.
b. Vérifier que $f_n(x) + f_{n+2}(x) = 2f_{n+1}(x)$ et interpréter graphiquement le résultat
c. Construire C_1
4. Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équation $x = e^{-n-1}$ et $x = e^{-n}$.
On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n.
a. À l 'aide d'une intégration par parties, calculer I_0
b. Montrer que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{e}$
c. Exprimer alors I_n en fonction de



n

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = ln(\sqrt{1+x}-1)$

´.1. Dresser le tableau de variation de f et construire(C).

2. Calculer l'ordonnée de A le point de C d'abscisse 3 . Soit B le point de C d'abscisse $\frac{5}{4}$ et P son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et H son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnée ´

.Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H ´

Partie B

1.Déterminer l'expression analytique de r la rotation de centre O et d'angle

2. Déterminer les coordonnées des points A0, B0 et P0 images respectives des points A, B et P par la rotation r .

3. On appelle g la fonction définie sur R par $g\ (x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ C' sa courbe

a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à (C), son image M0 par r appartient à (C').

b. Tracer sur le graphique précédent les points A_0, B_0, P_0 et la courbe (C')

Partie C

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{ln2} g(x)dx$ Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire A du domaine plan D limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe (C) d'extrémités B et A.

b. On pose I =$\int_{\frac{5}{4}}^{3} f(x)dx$ Trouver une relation entre A et I puis en déduire la valeur exacte de I

Exercice 11

1.On considère les équations différentielles $E: y'' = -\frac{1}{x^4}y$ et $E_0: y'' + y = 0$

a. Résoudre E_0

b. Soit f et g deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$ et vérifiant $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrer que g est une solution de E sur $]0,+\infty[$ si et seulement si f est une solution de E_0

c. Déterminer alors les solutions de E sur $]0,+\infty[$

d. Calculer $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

2. Soit f une fonction continue sur ℝ et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -x + 2 + \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt$

Vérifier que f et une solution de l'équation différentielle $y' = 3y - 1$ puis déduire l'expression de f

Exercice 12

1) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(xLn(x))^2}}$ si $x > 0$

a. Montrer que f est continue à droite en 0 et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0

c. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

d. Dresser le tableau de variation de f

2) On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

a. Montrer que pour tout $t \geq e$ on a $t\ln(t) \leq \sqrt{1+\left(t\ln(t)\right)^2} \leq \sqrt{2}\ln(t)$

b. Montrer que pour tout $t \geq e$ on a $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln(x))$

d. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

e . Montrer que C_F admet deux points d'inflexion

f. Construire C_F on prendra $f(1) = 0{,}5$ et $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0{,}4$

3) Pour tout $x \in [0,+\infty[$ on pose $\varphi(x) = x - F(x)$

a. Dresser le tableau de variation de φ

b. Montrer que l'équation $\varphi(x) = n$ admet une unique solution α_n

c. Montrer que $\forall n \in$ N ; $\alpha_n \geq n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}$