

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1° / Les suites suivantes sont convergentes :

a) $U_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; b) $V_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$; c) $W_n = (-1)^n n + \frac{n}{n+1}$; d) $a_n = \frac{2^n}{n}$
 i) $f_n = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n}$.

2) Soient (U_n) et (V_n) les suites définies sur \mathbb{N}^* par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $V_n = 1 - \frac{1}{n}$

Les deux suites sont adjacentes

Exercice 2**Partie A**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{x+1}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- Étudier les branches infinies de (C)
- Dresser le tableau de variation de f
- Tracer (C) et T la tangente à (C) au point abscisse 0
- a. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera
 b. Tracer dans le même repéré la courbe de f^{-1}
 c. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- Soit $\alpha \in]-\infty, 0[$ et S_α l'aire de la partie du plan limitée par (C)

Et les droites d'équation respective $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = 0$. Calculer S_α et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S_\alpha$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul

On considère la fonction F_n définie sur $]-\infty, 0]$ par $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nx}}{e^{x+1}} dt$

- a. Calculer $F_1(x)$ et vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \ln(2)$
 b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x)$
- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}(1 - e^{nx})$
 b. Montrer par récurrence que F_n admet une limite R_n en $-\infty$
- a. Montrer que $\forall t \leq 0$ on a $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$
 b. Montrer que $\forall n \geq 2$ et $\forall x \in]-\infty, 0]$ on a $\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x})$
 c. Dédurre un encadrement de R_n
- On pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$
 a. Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$
 b. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $\sum_{k=1}^n G_k(x) = (-1)^n F_{n+1}(x) - F_1(x)$
- Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$
 a. Montrer que $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} R_{n+1}$
 c. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

- a. Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et expliciter $f^{-1}(x)$
- Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$

2) Soit h la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $h(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2(x))$

- Montrer que h est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$
- Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(h^{-1})'(x) = f(x)$
- Soit $a > \ln(\sqrt{2})$ on désigne par $A(a)$ l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équation respectives $x = \ln(\sqrt{2})$, $x = a$ et $y = 0$ déterminer la limite de $A(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$

Exercice 3**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et C sa courbe représentative



- 1- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat
 b) Dresser le TV de f et tracer C

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction définie sur $]0,1[$ par $g_n(x) = f(x) - x^n$
 a. Montrer que g_n est strictement décroissante
 b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique réel α_n dans $]0,1[$ tel que $f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n = 0$
 c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$
 d. Montrer que (α_n) est croissante puis convergente
3. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ et $h : x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$
 a. Vérifier que $h(\alpha_n) = n$
 b. Montrer que $\ell = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = 0$

Partie B

1- Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^1 f(x) dx$

- a) Etudier le signe de $F(x)$
 b) À l'aide d'une intégration par parties montrer que $F(x) = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln(x)$
 c) En déduire l'aire par unité d'aire de la partie du plan limitée par C est la droite d'équation respectivement $x = (e)^2, x = 1$ et $y = 0$

2- Pourtant $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

- a) Montrer que $\forall n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$ on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$
 b) En déduire que : $f(n) + u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq u_n$
 c) En déduire alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4$

Exercice 4

- 1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x(2 - \ln(x)) - 2$
 a. Dresser le tableau de variation de g
 b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α tel que $4.8 < \alpha < 5$
 c. En déduire le signe de $g(x)$

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère

orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- a. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$
 b. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ on a $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} g(x)$
 c. Montrer que $f(\alpha) = 4 \frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ et donner le tableau de variation de f et tracer (C)

3) On considère les deux fonctions F et G définies sur $[1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{t^2} dt$$

Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $G(x) = 2 - \frac{1}{x} ((\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 2)$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$

Dans la suite on admet $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$ un nombre fini.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les fonctions F_n et G_n définies sur $[1, +\infty[$ par

$$F_n(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{t^{n+1}} dt$$

- a. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $0 \leq F_n(x) \leq 4 \frac{\alpha-1}{n\alpha^2}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$
 b. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $G_n(x) = \frac{1}{n^3} G(x^n)$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x)$
 c. Montrer que $\sum_{k=1}^n G_k(x) = F(x) - F_n(x)$
 d. On pose $u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$. Montrer que $l - u_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$
 e. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{l}{2}$



Exercice 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(x)$

1. Etudier le signe de $\sqrt{x} - 1$ et $\ln(\sqrt{x})$
2. En déduire le signe de $g(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - e^x - 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1.a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

2. a. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \left(\frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \right) - \frac{e^x - 1}{x}$

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat

3.a. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = e^x(e^{-g(x)} - 1)$

b. Dresser le tableau de variation de f

4.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

b. Construire (C)

5. Soit h la restriction de f sur $[1, +\infty[$

a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et $(h^{-1})'(0) = \frac{\sqrt{\alpha}}{e^{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}e^{\alpha}}$

c. Tracer $C_{h^{-1}}$

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^{\ln^2(x)} e^{\sqrt{x}} dx$

1.a. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$

b. En déduire l'expression de F

2. Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations respectives

$x = 0$, $x = 1$. Et $y = 0$