LPBT **SÉRIE N°1 - ARITHMÉTIQUE** **MR MASMOUDI**

BAC MATHS

EXERCICE 1 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On pose $A_n = n^2 - 2n + 2$ et $B_n = n^2 + 2n + 2$ et soit $d_n = A_n \wedge B_n$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, développer $(x^2+2))^2 - 4x^2$.
2) Montrer que n^4+4 n'est pas premier.
3) Dans cette question on suppose que n est impair.
   a) Montrer que d_n est impair.
   b) Montrer que d_n divise n.
   c) En déduire que A_n et B_n sont premiers entre eux.
4) On suppose que n est pair.
   a) Montrer qu'il existe un entier naturel impair p tel que $d_n = 2p$.
   b) Montrer que p divise n. En déduire que $d_n = 2$.

EXERCICE 2 :

1) a) Développer le polynôme $P(x) = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.
   b) En déduire que 5 est le seul nombre premier qui s'écrit sous la forme n^5+4n où $n \in \mathbb{N}$.
   c) Montrer, sans récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^5+4n est divisible par 5.
2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{4n+1}+3^{4n+1}$ est un multiple de 5.
   b) a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que si $a \wedge b = 1$ alors $(a+b) \wedge ab = 1$.
   c) Déterminer $(2^n+3^n) \wedge 6^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
   d) Déterminer les entiers naturels x et y tels que : $3^n x - 2^n y = 0$.

EXERCICE 3 :

1) Montrer que pour tout $x \in \{2\,;3\,;4\,;5\}$ on a $x^6 \equiv 1 \pmod 7$. En déduire le reste modulo 7 de 2011^{2010}.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.
   a) Montrer que si $n \equiv 1 \pmod 2$ alors u_n est divisible par 7.
   b) Montrer que si p est le reste modulo 6 de n alors $u_n \equiv u_p \pmod 7$.
   c) Déterminer les valeurs de n pour les quelles u_n divisible par 7.

EXERCICE 4 :

I) 1) Soit p un entier impair. Déterminer le reste de la division euclidienne de p^2 par 8.
   2) Montrer que pour tout entier pair x on a : $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.
   3) Soit a, b et c trois entiers impairs.

a) Déterminer le reste modulo 8 des entiers : $X = a^2 + b^2 + c^2$ et $Y = 2(ab + ac + bc)$.
b) En déduire que X et Y ne sont pas des carrés parfaits.
c) L'entier $\frac{Y}{2}$ est-il un carré? Justifier.

II) 1) Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de 2^n et 10^{2n} modulo 7.
2) Vérifier que N = 797979 est divisible par 7.
3) Soient d et e des chiffres tels que $d \neq 0$. On considère l'entier $a_n = dede\dots de$, d et e étant répétés chacun n fois ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer, suivant les valeurs de d et e, l'ensemble des entiers naturels non nuls n tel que a_n soit divisible par 7.

EXERCICE 5 :

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
2. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s + 1$ où q, r, s sont des entiers naturels.
   a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.
   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que x, y, z sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.
   c. Conclure.

EXERCICE 6 :

Soit $a = \sum_{k=0}^{9} 2011^k$.

1) Vérifier que $2011 \equiv 11 \pmod{100}$.
2) Discuter selon l'entier naturel n, le reste de 11^n modulo 100. En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k + 60$.
3) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, $a^p \equiv 0 \pmod{100}$.

4) Soit $N = \sum_{k=0}^{2009} 2011^k$.

a) Montrer que $N \equiv 201a \pmod{100}$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de N.

EXERCICE 7 :

1) On admet que pour tout entier premier $p \geqslant 3$ on a $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, montrer alors que : $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p}$.
2) En raisonnant par l'absurde montrer que pour un entier $p \geqslant 3$ tel que $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod{p}$ alors p est premier.
3) Soit un entier premier $n \geqslant 3$.
   a) Montrer que $\left(\frac{(n+1)^5-1}{n} - 5\right) \equiv 0 \pmod{n}$.
   b) En déduire que si $n!+1 = (n+1)^5$ alors $(n-1)! \equiv 5 \pmod{n}$.
   c) Peut-on trouver un entier premier $n \geqslant 3$ tel que : $n!+1 = (n+1)^5$.

EXERCICE 8 :

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

I) On cherche les entiers naturels n et p tels que $2^n - 3^p = 1$.
   1) Déterminer les restes de 3^p modulo 8.
   2) En déduire que si $(n\,;\,p)$ est solution alors $n \leqslant 2$.
   3) Déterminer tous les couples $(n\,;\,p)$ vérifiant $2^n - 3^p = 1$.

II) Soit $k \in \mathbb{N}$, on considère l'équation dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $x^2 + y^2 = 2^k$.
   1) Soit a un entier naturel multiple de 4. Montrer que si $x^2 + y^2 = a$ alors x et y sont pairs.
   2) Dans cette question, $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que l'équation admet des solutions.
      a) Vérifier que n est non nul.
      b) En considérant la plus petite valeur n_0 de n, déterminer une contradiction.
   3) Dans cette question, $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.
      a) Vérifier que $x = y = 2^n$ est une solution.
      b) Montrer par récurrence que c'est l'unique solution.