Exercice1:

1. Montrer que $19^5 \equiv 15[26]$

2. Soit a un entier relatif. Montrer que $a^{13} \equiv a[26]$

3. Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer que si $a^5 \equiv b[26]$ alors $b^5 \equiv a[26]$

4. Résoudre dans Z l'équation $x^5 - 26y = 19$

Exercice 2:

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur N par :
$x_0 = 3$et $x_{n+1} = 2x_n - 1$
$y_0 = 1$et $y_{n+1} = 2y_n + 3.$
1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Montrer que $x_n$et x_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel n
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
b. Exprimer $y_n$en fonction de n.
c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^P par 5.
d. On note d_n le PGCD de $x_n$et y_n pour tout entier naturel n. Déterminer les valeurs possibles de d_n en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3:

Partie A

1. Soit x et q deux entiers naturels non nuls tel que q est impair.
Démontrer que $1 + x$ divise $1 + x^q$
2. Soit $a \in$ N, $a \geq 2$ et $n \in$ N*
On suppose que $1 + a^n$ est un nombre premier.
(a) Démontrer que a est pair.
(b) Démontrer que n est une puissance de 2.
3. Parmi les nombres suivants, préciser ceux qui ne sont pas premiers. Justifier chaque Réponse.
1317 ; $1 + 1317^{16}$; $1 + 1316^{10}$; $1316^{16} - 1$

Partie B

On définit la suite $(u_n)_{n\in N}$de nombres entiers par $U_n = 1 + 6^{2^n}$
1. (a) Donner les écritures décimales de u_k pour $0 \leq k \leq 4$
(b) Quel est le nombre de chiffres de u_8 ?
2. Soit n et k des entiers naturels avec $k \geq 1$.
(a) Vérifier que $u_{n+k} - 1 = (u_n - 1)^{2^k}$
(b) En déduire que $u_{n+k} - 2$est divisible par u_n.
(c) Prouver que deux termes distincts de la suite $(u_n)_{n\in N}$sont premiers entre eux.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de $u_n$se termine par 7.
4. Les entiers un sont-ils tous premiers ?

Exercice 4 :

1. Déterminer les nombres entiers naturels m tels que $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

2. Soit p un entier naturel premier tel que $p = 3 + 4k$, $k \in \mathbb{N}$

Et soit n un entier naturel tel que $n^2 + 1 \equiv 0[P]$

a. Vérifier que $(n^2)^{2k+1} \equiv -1[P]$

b. Montrer que $n \wedge p = 1$

c. En déduire que $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[P]$

3. Conclure

Exercice5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit $r_1 = R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r_2 = R_{\left(O,\frac{\pi}{5}\right)}$

A/ 1 . Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation(E): $5x + 3y = 75$

2. Soit I le point d'affixe 1 , on considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique Sa position initiale est en. I On appelle d la distance qu'a parcourue le point A après avoir Subie p rotation r_1 et q rotation r_2 Déterminer les valeurs possibles de p et q pour lesquelles $d = 5\pi$

B/ Soit $S = S_{d\left(0,4,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $S' = S_{d\left(0,6,\frac{6\pi}{5}\right)}$, m et n deux entiers naturel non nuls

On pose $S_m = \underbrace{S \circ S \circ S \dots\dots\dots\dots \circ S}_{m\ fois}$ et $S'_n = \underbrace{S' \circ S' \circ S' \dots\dots\dots \circ S'}_{n\ fois}$ et $f = S_m \circ S'_n$

1. Justifier que f est une similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$
2. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
3. On appelle M le point d'affixe 6 et M' sont image par f

a. peut-on avoir $OM' = 240$

b. Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels (m, n)tel que $OM' = 576$ Calculer alors la mesure principale de $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$

Exercice 6:

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ les équations $\mathrm{E}: 35\mathrm{x} - 96\mathrm{y} = 1$ et $\mathrm{E}': 35\mathrm{x} - 96\mathrm{y} = 5$

1 . Vérifier que le couple $(11,4)$ est une solution de E puis résoudre E et E'

2. Soit (x, y) une solution de E déterminer l'inverse de x modulo 96 et l'inverse de y modulo 35

3 . Soit (x, y) une solution de E' et $d = x \wedge y$

a. Déterminer les valeurs possibles de d

b. Déterminer x et y lorsque $d = 5$

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} n \equiv 11[96] \\ n \equiv 10[35] \end{cases}$

5. On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation :(F): $t^{35} \equiv 2$

a. Montrer que si t est une solution de (F) alors $t \wedge 97 = 1$puis déduire que : $t^{96} \equiv 1$

b. Montrer que si t est une solution de (F) alors $t \equiv 2^{11}[97]$

c. Montrer que si $t \equiv 2^{11}[97]$ alors t est solution de (F)

d. Résoudre alors (F)

Exercice7:

1) a) Prouver que 29 est un nombre premier

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1[28]$ montrer que $x^n \equiv x[29]$

2) On considère l'équation(E): $17x - 28y = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

a) Justifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

b) Résoudre (E)

3) Soit $A = \{0,1, \dots 28\}$ pour tout $x \in A$ on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29

Et $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29

a) Soit $(x, y) \in A^2$ montrer que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$

b) Montrer que pour tout $x \in A$ on a $g \circ f(x) = x$

4) On attribue à chaque lettre de l'alphabet l'entier donné par le tableau ci-dessous

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	è	é
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Pour chaque lettre α on détermine l'entier n associe puis on calcule $f(n)$.

La lettre α est alors codé par la lettre associée a $f(n)$

a) Coder le mot gauss

b) Décoder le message < **bjajif>**

Exercice 8:

1) a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation E: $13x - 19y = 11$

b. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ le système $S:\begin{cases}(n+1)^{13} \equiv -6[13] \\ (n+1)^{19} \equiv 5[19]\end{cases}$

2) a. Montrer que 191 est un nombre premier

b. Soit $E = \{1,2, \dots 190\}$

Montrer que pour tout $k \in E$ il existe un unique $u_k \in E$ tel que $ku_k \equiv 1[191]$

c. Montrer que si $k \neq k'$ alors $u_k \neq u_{k'}$

d. En déduire que $\sum_{k=1}^{190} u_k \equiv 0[191]$

3) a. Montrer que pour tout $k \in E$ on a $k^{190} \equiv 1[191]$

d. En déduire que $1 + 2^{189} + 3^{189} + \cdots \dots \dots \dots \dots + 190^{189} \equiv 0[191]$

4) on pose $S = 190! \sum_{k=1}^{190} \frac{1}{k}$

a. Montrer que $S \in \mathbb{N}$

b. Montrer que $S \equiv 0[191]$

5) a) Résoudre dans Z l'équation $x^2 \equiv 1[191]$

b) Montrer que $189! \equiv 1[191]$ puis déduire que $190! \equiv -1[191]$

6) Soit P un entier naturel tel que $(p-1)! \equiv -1[p]$ Montrer que p est premier

Exercice 9:

A) On considère dans Z^2 l'équation E : $142x - 857y = 3$

1) a. En utilisant algorithme d'Euclide montré que 142 et 857 sont premiers entre eux

b. Déterminer un couple d'entier tel que $142u - 857v = 1$

c. En déduire une solution particulière de E et la résoudre

2) Soit n un entier naturel à 6 chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois dernier, le résultat obtenu est $6n + 21$

On suppose que l'écriture décimale de n est $n = abcdef$ et on pose $A = abc$ et $B = def$

a. Montrer que le couple (B, A) est une solution de E

b. Déterminer alors n

B) Soit a un entier naturel non nul et p un nombre premier supérieur ou égal à 5 tel que

$$a^2 + a + 1 \equiv 0[P]$$

1) a. Montrer que $(a+1) \wedge p = 1$ et $(a-1) \wedge P = 1$

b. Montrer que $a^3 \equiv 1[P]$

c. Montré alors que 3 est le plus entier naturel non nul vérifiant $a^k \equiv 1[P]$

2) a. Montrer que $a^{P-1} \equiv 1[P]$

b. En effectuant la division euclidienne de $(p-1)$ par 3 montrer que $P \equiv 1[3]$

Exercice 10

Soit $(\mathrm{F_n})$ la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $\mathrm{F_n} = 2^{2^n} + 1$

1) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\mathrm{F_{n+1}} - 2 = \mathrm{F_n}(\mathrm{F_n} - 2)$

2) On considère la suite $(\mathrm{u_n})$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mathrm{u_n} = \mathrm{F_0 F_1} \dots \dots \dots \mathrm{F_{n-1}}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{u_n} = \mathrm{F_n} - 2$

b) En déduire que $\mathrm{F_n} \wedge \mathrm{u_n} = 1$ et que $\mathrm{F_n} \wedge \mathrm{F_m} = 1$ pour tout n et m de $\mathbb{N}$

c) En déduire qu'il existe une infinité des nombre premier

3) Soit $n \geq 2$. Déterminer le chiffre des unités de $\mathrm{F_n}$