Série Arithmétique

Exercice 1 : (Première partie : les exercices de 1 à 15).

Soit n un entier naturel non nul.

1) Déterminer suivant n, le chiffre des unités de 3^n. En déduire le chiffre des unités de l'entier $x = 2003^{2010}373^{2011}$.
2) Montrer que 6 est le chiffre des unités de 6^n.
3) Déterminer suivant n le chiffre des unités de l'entier $y = 3^n + 6^n + 9^n$. En déduire le chiffre des unités de l'entier $a = 2003^{2011} + 2006^{2011} + 2009^{2011}$.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $n^2 + n + 7 \equiv 0 \pmod{13}$.
2) Soit x un entier.
   a) Montrer que $x^3 \equiv 0 \pmod 9$ ssi $x \equiv 0 \pmod 3$; $x^3 \equiv 1 \pmod 9$ ssi $x \equiv 1 \pmod 3$; $x^3 \equiv 8 \pmod 9$ ssi $x \equiv 2 \pmod 3$.
   b) Montrer que si $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 9 alors a ou b ou c est multiple de 3.

Exercice 3 :

Les questions sont indépendantes.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 8^{2008} par 5.
2) Déterminer les entiers naturels n tels que $67^n - 1$ est divisible par 15.
3) Déterminer les entiers naturels n et p tels que : $15^n - 21^p$ soit divisible par 12.

Exercice 4 :

1) Montrer que pour tout $x \in \{2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$ on a $x^6 \equiv 1 \pmod 7$. En déduire le reste modulo 7 de 2011^{2010}.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.
   a) Montrer que si $n \equiv 1 \pmod 2$ alors u_n est divisible par 7.
   b) Montrer que si p est le reste modulo 6 de n alors $u_n \equiv u_p \pmod 7$.
   c) Déterminer les valeurs de n pour les quelles u_n divisible par 7.

Exercice 5 :

1) a/ Déterminer suivant l'entier naturel n les possible de 5^n modulo 6
   b/ En déduire le reste modulo 6 de l'entier $A = (2009)^{2008}$
2) a/ Montrer que : pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $5^n \equiv 2^n + 3^n \pmod 6$
   b/ En déduire que : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B = (2005)^p + (2006)^{2009} + (2007)^{2009}$ est divisible par 6
3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod 6$

Exercice 6 :

On considère l'entier $N = 2015^{2015} + 2013^{2013} + 2011^{2011}$.

1) Montrer qu'il existe un entier k tel que $N = 11k - 3$.
2) a) Etudier selon l'entier naturel n le reste modulo 11 de 3^n.
   b) En déduire que $N^{2015} \equiv -1 \pmod{11}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} N^{2015p}$.

a) Déterminer les entiers naturels n pour que X_n soit divisible par 11.

b) Déterminer le reste modulo 11 de $(X_{2015})^{10}$.

Exercice 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+4x+3 \equiv 0[7]$
2) Soit n un entier naturel
   a/ Déterminer suivant n le reste modulo 7 de 2^n
   b/ Déterminer le reste modulo 7 de l'entier 107^{2009}
   c/ Déterminer les entiers naturels n tels que $107^n+107^{2n}+107^{3n}$ soit divisible par 7
3) Soit a un entier naturel non divisible par 7
   On désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1[7]$
   a/ Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1[7]$
   b/ Quelles sont alors les valeurs possibles de k.

Exercice 8 :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \equiv 1 \pmod 3$.
2) Déterminer suivant l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 17.
3) Déterminer les entiers naturels n tels que 4^n-1 est divisible par 5.
4) Déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.
5) Soit p un nombre premier distinct de 2.
   a) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $4^k \equiv 1 \pmod p$.
   b) Soit $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \pmod p$. On note m le plus petit entier strictement positif tel que $4^m \equiv 1 \pmod p$. Montrer que n est divisible par m.
   c) En déduire que $p \equiv 1 \pmod m$.

Exercice 9 :

1) Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $2^{3n}-8 \equiv 0 \pmod 7$.
2) a/ Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel k les restes modulo 7 de 2^k
   b/ En déduire le reste modulo 7 de $A = 8^{1001}+2^{3004}$
3) Soit $P \in \mathbb{N}$ on considère $A_p = 2^p+2^{2p}+2^{3p}$
   a/ Si p = 3n quel est le reste de la division de A_p par 7
   b/ Démontrer si p = 3n+1 alors A_p est divisible par 7
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2+2 \equiv 0 \pmod 7$
5) Montrer que tout n $\in \mathbb{N}$ $3^{4n+2}-4^{n+2} \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 10 :

I) 1) Soit p un entier impair. Déterminer le reste de la division euclidienne de p^2 par 8.
   2) Montrer que pour tout entier pair x on a : $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.
   3) Soit a, b et c trois entiers impairs.
   a) Déterminer le reste modulo 8 des entiers : $X = a^2+b^2+c^2$ et $Y = 2(ab+ac+bc)$.
   b) En déduire que X et Y ne sont pas des carrés parfaits.
   c) L'entier $\frac{Y}{2}$ est-il un carré? Justifier.

II) 1) Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de 2^n et 10^{2n} modulo 7.
   2) Vérifier que N = 797979 est divisible par 7.
   3) Soient d et e des chiffres tels que $d \neq 0$. On considère l'entier $a_n = dede\ldots de$, d et e étant répétés chacun n fois ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer, suivant les valeurs de d et e, l'ensemble des entiers naturels non nuls n tel que a_n soit divisible par 7.

Exercice 11 :

Soit x un entier vérifiant $\begin{cases} x \equiv 3 \ (mod\ 8) \\ x \equiv 2 \ (mod\ 5) \end{cases}$.

1) a) Montrer que $3x \equiv 1 \ (mod\ 40)$.
   b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $x = 40k - 13$.
   c) Déterminer, lorsque $x \geqslant 0$, le chiffre des unités de x.

2) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour que $3^n + 13$ soit divisible par 40.

Exercice 12 :

Soit $a = \sum_{k=0}^{9} 2011^k$.

1) Vérifier que $2011 \equiv 11 \ \ (\text{mod } 100)$.
2) Discuter selon l'entier naturel n, le reste de 11^n modulo 100. En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k + 60$.
3) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$, $a^p \equiv 0 \ \ (\text{mod } 100)$.
4) Soit $N = \sum_{k=0}^{2009} 2011^k$.
   a) Montrer que $N \equiv 201a \ \ (\text{mod } 100)$.
   b) Déterminer les deux derniers chiffres de N.

Exercice 13 :

1) Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
   a) Vérifier que pour tout $k \in E$, on a : $k!\, C_{11}^{k} = 11 \times 10 \times \ldots \times (12-k)$.
   b) Montrer alors que pour tout $k \in E$, $C_{11}^{k} \equiv 0 \ \ (\text{mod } 11)$.
   c) En déduire que pour tous les entiers a et b : $(a+b)^{11} \equiv a^{11} + b^{11} \ \ (\text{mod } 11)$.
2) a) Montrer que pour tout entier n : $n^{11} \equiv n \ \ (\text{mod } 11)$.

   b)Montrer que pour tous les entiers a et b :
   $\left[a^{11} + b^{11} \equiv 0 \ \ (\text{mod } 11)\right]$ si et seulement si $\left[a + b \equiv 0 \ \ (\text{mod } 11)\right]$.

   a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} -40 \leq x \leq 40 \\ x^{11} + 2048 \equiv 0 \ \ (\text{mod } 11) \end{cases}$.

Exercice 14 :

1) On admet que pour tout entier premier $p \geqslant 3$ on a $(p-2)! \equiv 1 \ \ (\text{mod } p)$, montrer alors que : $(p-1)! + 1 \equiv 0 \ \ (\text{mod } p)$.
2) En raisonnant par l'absurde montrer que pour un entier $p \geqslant 3$ tel que $(p-1)! + 1 \equiv 0 \ \ (\text{mod } p)$ alors p est premier.
3) Soit un entier premier $n \geqslant 3$.
   a) Montrer que $\left(\frac{(n+1)^5 - 1}{n} - 5\right) \equiv 0 \ \ (\text{mod } n)$.
   b) En déduire que si $n! + 1 = (n+1)^5$ alors $(n-1)! \equiv 5 \ \ (\text{mod } n)$.
   c) Peut-on trouver un entier premier $n \geqslant 3$ tel que : $n! + 1 = (n+1)^5$.

Exercice 15 :

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

I) On cherche les entiers naturels n et p tels que $2^n - 3^p = 1$.

1) Déterminer les restes de 3^p modulo 8.
2) En déduire que si $(n\,;\,p)$ est solution alors $n \leqslant 2$.
3) Déterminer tous les couples $(n\,;\,p)$ vérifiant $2^n - 3^p = 1$.

II) Soit $k \in \mathbb{N}$, on considère l'équation dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $x^2 + y^2 = 2^k$.

1) Soit a un entier naturel multiple de 4. Montrer que si $x^2 + y^2 = a$ alors x et y sont pairs.
2) Dans cette question, $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que l'équation admet des solutions.
   a) Vérifier que n est non nul.
   b) En considérant la plus petite valeur n_0 de n, déterminer une contradiction.
3) Dans cette question, $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.
   a) Vérifier que $x = y = 2^n$ est une solution.
   b) Montrer par récurrence que c'est l'unique solution.

Exercice 16 :

Soit n un entier naturel non nul. On pose $a = n^4 - 1$ et $b = n^6 - 1$.

1) Montrer que $n^2 + n + 1$ et $n^2 + 1$ sont premiers entre eux.
2) Montrer que $n^2 - n + 1$ et $n^2 + 1$ sont premier entre eux.
3) En déduire $a \wedge b$.

Exercice 17 :

A) 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n+3$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3n^2 - 9n + 16) \in \mathbb{N}^*$.

3) a, b et c des entiers naturels non nuls tels que $bc - a \neq 0$. Montrer que $a \wedge b = (bc - a) \wedge b$.

4) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $(3n^3 - 11n) \wedge (n+3) = 48 \wedge (n+3)$.

5) En déduire les entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3} \in \mathbb{N}$.

B) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a = n^2 + 1$ et $b = n(n^2 - 1)$.

1) Montrer que $(n^2 + 1) \wedge n = 1$.
2) Montrer que $a \wedge b = (n^2 - 1) \wedge 2$.
3) En déduire suivant n, $a \wedge b$.

Exercice 18 :

1) a/ Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, les restes modulo 9 de 2^n

   b/ En déduire les valeurs de n pour que $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 9$

   c/ Montrer que $2^x \times 11^y \equiv 1 \pmod 9$ si et seulement si $x + y \equiv 0 \pmod 6$

   d/ En déduire le reste de la division euclidienne de $2009^{2008}.20^{992}$ par 9

   e/ Soit $N = a.11^2 + b.11 + c$ ou a,b et c sont des éléments de $\{0,1,2,..,9\}$. Montrer que : si $N \equiv 0 \pmod 9$ alors $(4a + c)^3 - b^3 \equiv 0 \pmod 9$.

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ le système (S) : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ (x \wedge y)(x \vee y) = 600 \end{cases}$. Soit (x,y) une solution de (S) et $d = x \wedge y$.

   a/ Montrer que $d \in \{1, 2, 5, 10\}$.

   b/ Montrer que $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) \wedge ab = 1$, $\forall a$ et $b \in \mathbb{Z}$.En déduire que $d = 10$

   c/ Donner alors les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ du système (S).

Exercice 19 :

Toutes les questions sont indépendantes.

1) Déterminer les entiers naturels a et b tels que : $\begin{cases} a+b=168 \\ a\wedge b=21 \end{cases}$.

2) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer $(n^2+1)\wedge(n+1)$.

3) Soit a et b deux entiers relatifs. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux alors $4a+11b$ et $3a+8b$ le sont aussi.

4) Montrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $x>y$, alors $(x+y)\wedge(x-y)$ est égal à 1 ou à 2.

Exercice 20 :

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Démontrer que p^2-1 est divisible par 24.

Exercice 21 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 6 et a, b et c trois entiers naturels tels que :

$a=n^2+n+1$, $b=n^2+n+4$, $c=n^4+3n^3+5n+4$.

1) Sachant que $c=ab$, déterminer n, puis les nombres a, b et c.
2) Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide que a et b sont premiers entre eux.
3) En déduire une solution de l'équation : $ax+by=1$.

Exercice 22 :

Soit n un entier relatif quelconque, on pose :

$A=n-1$ et $B=n^2-3n+6$.

1) Démontrer que $A\wedge B=A\wedge 4$.
2) Déterminer suivant les valeurs de n : $A\wedge B$.

Exercice 23 :

Soit a un entier distinct de 1, on considère l'équation dans $\mathbb{Z}^2$, (E_a): $(a-1)x-(a^2+a+1)y=26$.

1) Dans cette question $a=2$ donc (E_2) : $x-7y=26$.
   a) Vérifier que si (x,y) solution de (E_2) alors $x\equiv 5 \pmod 7$.
   b) Résoudre alors (E_2).
   c) Déterminer suivant l'entier naturel n, le reste de 5^n modulo 7.
   d) Déterminer les couples d'entiers naturels (x,y) solutions de (E_2) tels que : $5^x+5^y\equiv 3 \pmod 7$.
2) Dans cette question $a\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$.
   a) Montrer que $(a-1)\wedge(a^2+a+1)$ divise 3.
   b) Déterminer les valeurs de a pour que (E_a) admette des solutions.

Exercice 24 :

Soit p un entier distinct de 1 et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $S=1+p+p^2+....+p^{n-1}$.

1) Ecrire S sous forme d'un quotient. En déduire que p^n et $1-p$ sont premiers entre eux.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $p^nx-(1-p)y=p$.
3) En déduire dans $\mathbb{Z}^2$ les solutions de l'équation : $10^nx+2^{n+2}y-10\times 2^{n-1}=0$.

Exercice 25 :

Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la droite $\Delta : 3x+4y-1=0$.

1) Déterminer la partie $\mathscr{D}$ de Δ dont les coordonnées des points sont des entiers.
2) Déterminer les points M de $\mathscr{D}$ tels que OM^2 est divisible par 13.
3) Déterminer les entiers a et b tels que $3a+4b=5$ et $a\wedge b=5$.

Exercice 26 :

1) Montrer que pour tout entier n, $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.
2) On considère l'équation dans $\mathbb{Z}^2$, (E) : $87x+31y=2$.
   a) Vérifier à l'aide de 1) que 87 et 31 sont premiers entre eux.
   b) En déduire un couple (u,v) d'entiers tels que $87u+31v=1$.
   c) Résoudre alors (E).

Exercice 27 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $(2n+1)x-(2n^2+2n)y=1$.

1) Développer $(2n+1)^2$. En déduire que (E) admet des solutions.
2) Résoudre (E).

Exercice 28 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $2x-7y=28$.
2) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, le système (S) suivant : $\begin{cases} 2x-7y=28 \\ y-1\equiv x^2\ (mod 7) \end{cases}$.
   a) Résoudre (S).
   b) Soit $(x_0\,;\,y_0)$ une solution de (S). Déterminer $x_0\wedge y_0$ (on distinguera deux cas).

Exercice 29 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E_1) : $11x+8y=79$.
   a) Montrer que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E_1) alors $y\equiv 3\ (mod 11)$.
   b) Résoudre alors l'équation (E_1).
2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_2) : $3y+11z=372$.
   a) Montrer que si $(y\,;\,z)$ est solution de (E_2) alors $z\equiv 0\ (mod 3)$.
   b) Résoudre alors l'équation (E_2).
3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_3) : $3x-8z=-249$.
4) Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 480 dinars. Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars, celle du deuxième lot est 36 dinars et de 4 dinars pour celle du troisième lot. Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 30 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$. On pose $S_n(t)=1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}$.

1) Donner une autre expression de $S_n(t)$. En déduire que $t^n\wedge(1-t)=1$.
2) u et v deux entiers premiers entre eux, $(x_0\,;\,y_0)$ une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) : $ux+vy=1$.
   Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère la droite $\mathscr{D}_n$: $3^n x-2y-1=0$.
   a) Déterminer l'ensemble F_n des points $M(x\,;\,y)$ de la droite $\mathscr{D}_n$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
   b) Existe-t-il des points de F_n appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $S_n(3)$.

Exercice 31 :

Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $138x-55y=5$.

1) Montrer que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E) alors $x\equiv 0\ (mod 5)$.
2) Résoudre alors (E).

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a = 55n + 10$ et $b = 138n + 25$.

a) Vérifier que $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).

b) Déterminer suivant les valeurs de n, $a \wedge b$.

Exercice 32 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation : $3x + 4y = -8$.
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la droite Δ: $3x + 4y + 8 = 0$ et on note A le point de Δ d'abscisse 0.
   a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
   b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y). Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$. En déduire que la réciproque de a) est vraie.

Exercice 33 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $x - 7y = 1$.
2) Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$: $x^2 - 7y^2 = 1$.
   a) Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors x et y sont premiers entre eux.
   b) Déterminer la solution (a, b) de (E) telle que b soit le plus petit possible.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = a_n + b_n\sqrt{7}$ où a_n et b_n deux entiers naturels non nuls tels que (a_n, b_n) est solution de (E).
   b) En déduire le nombre de solutions de (E).
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(8 - 3\sqrt{7}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{7}$.
   d) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 34 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $6x + 5y = 1$.
2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $6x + 5y = 2010$.
   a) Montrer que si $(x_0\ ;\ y_0)$ est solution de (E) alors $x_0 \equiv 0 \pmod 5$ et $y_0 \equiv 0 \pmod 6$.
   b) Résoudre l'équation (E).
3) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $(m\ ;\ d)$ est solution de (E) avec $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$. (On a alors $6m + 5d = 2010$).
   a) Montrer que $d = 6$.
   b) Déterminer tous les couples $(a\ ;\ b)$.

Exercice 35 :

On admet que si $a \wedge b = 1$ alors pour tout entier naturel m, $a^m \wedge b^m = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S_n) : $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{5^n} \\ x \equiv 1 \pmod{2^n} \end{cases}$.

1) Montrer que si x est solution de (S_n) alors :
   a) x^2 est solution de (S_{n+1}).
   b) $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$.
2) Soit $a_n = 5^{2^{n-1}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est solution de (S_n).

3) Trouver un entier naturel p tel que p et p^2 ont les mêmes chiffres respectifs des unités, des dizaines et des centaines.

4) Soit dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $125x-8y=1$.

a) Vérifier que (5 ; 78) est solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

c) En déduire que x est solution de (S_3) si et seulement si $x \equiv 625 \ (mod\ 10^3)$.

Exercice 36 :

On considère la suite d'entiers naturels (u_n) définie par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1+u_n)^5 - 1$.

1) Montrer que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n\left[(u_n)^4 + 5\left((u_n)^3 + 2(u_n)^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$.

c) Calculer u_3. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$.

d) Déterminer un entier naturel A tel que A^3 se termine par 2009.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv -1 \pmod 7$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 8.

c) Soit $\Delta : 7x - 8y - 1 = 0$. Montrer que Δ contient une infinité de points dont les coordonnées sont des entiers naturels.