Arithmétique 1

Divisibilité . Congruence . Division euclidienne

Exercice 1 : Questions indépendantes :

1) Déterminer le reste modulo 3 de -2015
En déduire le reste modulo 3 de 2015^{2016}
2) Quel est le reste de la division par 7 des nombres $a = 999888777666555444333222111$ et $b = -a$
3) Déterminer les entiers n tels que $(n-2) / (n-9)$.
4) Déterminer les restes de la division euclidienne de 4^m par 3 , m un entier naturel.
n , p et q trois entiers naturels
Montrer que $4^n + 4^p + 4^q$ est un multiple de 3.
5) Soit a un entier , montrer que $(a^3 - 1)(a^4 + a)$ est un multiple de 7.
6) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :
a) $2x \equiv 3 (mod 7)$ b) $2x \equiv 3 (mod 11)$
c) $2x \equiv 12 (mod 15)$ d) $3x \equiv 2 (mod 6)$
7) Montrer $a = 2n + 3$ et $b = n + 1$. sont premiers entre eux .De même pour $a = 6n - 7$ et $b = 4n - 5$.
8) 1517 est - il premier ? Quels sont les entiers a et b vérifiant $a^2 = b^2 + 1517$
9)On désigne par x et y deux entiers
Montrer que : $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$ si et seulement si: $x \equiv 0 \pmod 7$ et $y \equiv 0 \pmod 7$
10) Résoudre dans Z : $\begin{cases} x \equiv 2 (\mathrm{mod} 10) \\ x \equiv 5 (\mathrm{mod} 13) \end{cases}$
11) répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Soit *a* un entier tel que *a* □16 (mod 17). Alors $a^{2009} + a^{2010}$ □□□□(mod 17).
12) Montrer que $10^{3n} \equiv 1 (mod 37)$;(ind:999=27x37)
En déduire le reste de la division euclidienne de $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37

Exercice 2

1)Montrer que $\dfrac{2^{2008} + 2^{100} + 4}{3}$ est un entier .

2)Montrer que $\dfrac{3^{4n+1} + 3^{2n+1} + 2}{8}$ est un entier

Exercice 3

On désigne par a et b deux entiers non nuls tel que : $(a + b) \wedge (ab) = 7$
1) Montrer que 7 divise a et b .
2) En déduire que : $a \wedge b = 7$.
3) Déterminer alors l'ensemble des couples (a , b) d'entiers vérifiant : $\begin{cases} (a+b) \wedge ab = 7 \\ a \vee b = 441 \end{cases}$

Exercice 4

1) Montrer que $7^2 \equiv -1 (mod 10)$
2) Quel est le chiffre des unités de l'entier $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{400}$?

Exercice 5

1) Montrer que $2^{n+3} - 2^n \equiv 0$ (… tout entier naturel n.
2) Déterminer pour n un entier naturel , les restes de la division euclidienne de 2^n par 7.
En déduire le reste de la division euclidienne de 44^{2016} par 7
3)Démontrer que $9^n \equiv 2^n \pmod 7$
En déduire le reste de la division euclidienne de $222^9 \times 9^{222}$ par 7.

Exercice 6

1) Soit x un entier relatif .
a) Démontrer que :
$3x \equiv 8 (mod 10) \Rightarrow x \equiv 6 (mod 10)$
b)Démontrer que :$x^2 \equiv 6 (mod 10) \Rightarrow x \equiv 4 (mod 10)$ ou $x \equiv 6 (mod 10)$
2) Soit n un entier naturel.Démontrer que
$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 \equiv 0 (mod 10)$
$\Leftarrow$ si et seulement si $\Rightarrow$
$(n + 1)^2 \equiv 6 (mod 10)$
3)En déduire les entiers naturels , multiples de 10 est inférieurs à 5000, qui sont la somme des carrés de trois entiers consécutifs.

Exercice 7

1) a- Soit n un entier naturel , déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 3 de 2^n .
b- Déterminer le reste modulo 3 de 40502^{2010}
2) a- Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$5^{2n} \equiv 1 (mod 3)$.
b-Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que, $2^n - 5^{2n} \equiv 0 (mod 3)$.
3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que, $40502^n - 40525^n \equiv 0 (mod 3)$.

Exercice 8

1) Soit a un entier appartenant à { 2,3,4,5} et n un entier naturel.
a) Vérifier que $a^6 - 1 \equiv 0 (mod 7)$
b) Soit A_n le nombre défini par
$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ .Montrer que :
$A_{n+6} \equiv A_n (mod 7)$
2) On note q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6.
a) Montrer que $A_n \equiv A_r (mod 7)$
b) Déterminer l'ensemble des valeurs de n , pour lesquels A_n est divisible par 7
3) Soit $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.
Démontrer que $B_n \equiv A_n (mod 7)$

Exercice 9

On désigne par x et y deux entiers .
1) Déterminer tous les restes de la division euclidienne de $x^2 - 3y^2$ par 4.
2) Existe-t-il trois entiers x , y et z tels que $x^2 - 3y^2 + 4z = 3$?

Exercice 0:

Vrai ou Faux (En justifiant)

1) Pour tout entier naturel n:

a) $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 Faux

b) $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7. Vrai

2) n étant un entier impair et a et b deux entiers.

n impair

Si n divise a + b et n divise a - b alors n divise a et n divise b.

n/2a | n/a

n/2b | n/b

Questions inépendantes

1) les entiers $a = 2n^3 - 14n + 2$ et $b = n + 3$ où n un entier naturel.

a) Montrer que : $a \wedge b = b \wedge 10$.

b) Déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$

c) Déterminer n tels que $a \wedge b = 5$.

2) a) Etudier selon n les restes possibles de 4^n par 11.

b) Résoudre $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0\,[11] \\ n \equiv 2\,[10] \end{cases}$.

Exercice 1:

1) Soient les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 3$, $b_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n + 52b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 15b_n$

a) Démontrer que si 7 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$ alors 7 divise $a_n + b_n$

b) Montrer alors par récurrence que pour tout n, 7 ne divise pas $a_n + b_n$.

c) Démontrer que pour tout n entier naturel n, $\mathrm{pgcd}(a_n, b_n) = \mathrm{pgcd}(a_{n+1}, b_{n+1})$

d) Démontrer que pour tout n entier naturel n, a_n et b_n sont premier entre eux.

2) On considère l'équation: (E): $a_1x + b_1y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a) Justifie que (E) possède au moins une solution.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de (E).

c) Résoudre alors l'équation (E).

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 78 tel que $269x_0 \equiv 1\ [78]$.

Exercice 2 :

1) a) Prouver que 29 est un nombre premier.

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1 \pmod{28}$.

En utilisant le théorème de Fermat, prouver que $x^n \equiv x \pmod{29}$.

2) On considère l'équation (E): $17x - 28y = 1$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. a) Le couple (5, 3) est il solution de (E) ?

b) Résoudre alors (E).

3) Soit $A = \{x \in \mathbb{N},\ x < 29\} = \{0, 1, 2, \cdots, 28\}$.

Pour $x \in A$, on note f (x) le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et g (x) le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

a) Pour $x \in A$, prouver que $g(f(x)) = x$.

b) Applications:

On attribue à chaque lettre de l'alphabet et aux deux signes + et -, l'entier donné par le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	+	-						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28						

Exemple: Voici deux exemples

Message initial :	G	A
Entier associé :	7	1
Utilisation de f :	$7^{17} \equiv 24\ [29]$	$1^{17} \equiv 1[29]$
Message codé :	X	A

Amine reçoit le message suivant, $\boxed{\text{X P R F}}$ codé par Ali, à l'aide de la fonction f.

Décrypter ce message à la place d'Amine.

Exercice 3

1) On considère l'équation (E): $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs

a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u ; v) tel que $6u + 7v = 1$

b) En déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E)

c) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E)

2) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace (E).

Soit P le plan d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.

b) Déterminer les coordonnées de ce point.

3) On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair.

b) On pose $y = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le reste dans la division euclidienne de p + z par 3 est égal à 1.

c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.

- Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$
- En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont ...