EXERCICE : 2

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$

- On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
- On désigne par $\mathcal{C}_g$ le quart de cercle de centre O et de rayon 1
- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie grise compris entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et Δ (voir figure 1).

1- Justifier par calcul la présence de la demi-tangente verticale à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 — 0.5

2- <u>On utilisant le graphique répondre aux questions suivants</u>

a- Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

Montrer que h est une bijection de $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ sur un intervalle K que l'on précisera — 0.5

b- Etudier la dérivabilité sur K de la fonction réciproque h^{-1} — 0.75

c- Tracer soigneusement sur la feuille annexe la courbe Γ' de h^{-1}. — 1

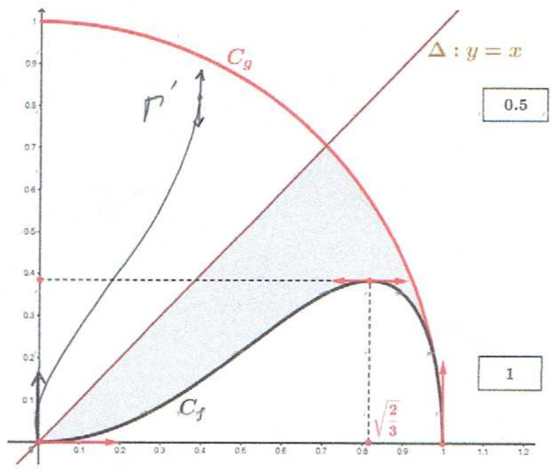
3- Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in[0;1[$ — 1

4-a- Montrer que la fonction g est définie sur $[0;1]$ par $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ — 0.5

b- Donner une interprétation graphique de l'intégrale $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$, puis vérifier que $I=\frac{\pi}{4}$ — 0.5

5-a- On note $J=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. On écrivant $x^2\sqrt{1-x^2}=x\cdot x\sqrt{1-x^2}$ et on utilisant une intégration par partie , montrer que $J=\frac{1}{4}I=\frac{\pi}{16}$ — 1

b- En déduire l'aire de la partie grise $\mathcal{A}$ — 0.5



6- Soit G et F les fonctions définies sur $[0;1]$ et $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Respectivement par : $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$; $F(x)=G(\sin(x))$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $F'(x)=\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ — 1

b- En déduire que $F(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x$

c- Retrouver alors le calc

7- On définit la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ par $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

a- Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante 0.75

b- En déduire que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente 0.5

c- Montrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ 0.75

d- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ 0.25