Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x \frac{1+e^t}{1+e^{2t}}\,dt$.

On désigne par C_F la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner le sens de variation de F.

② Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\int_1^{e^x} \frac{1+t}{t(1+t^2)}\,dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=G(x)$.

③ a) Vérifier que pour tout $t\in]0,+\infty[$, $\frac{1+t}{t(1+t^2)}=\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}$.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $G(x)=\int_1^{e^x}\frac{dt}{1+t^2}+\ln\left(\frac{\sqrt{2}\,e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$.

④ Soit h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x)=\tan x$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=-\frac{\pi}{4}+h^{-1}(e^x)+\ln\left(\frac{\sqrt{2}\,e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$.

⑤ a) Calculer $\lim_{x\to-\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

b) Montrer que la droite $D: y=x-\frac{\pi}{4}+\ln(\sqrt{2})$ est une asymptote oblique à C_F au voisinage de $-\infty$.

c) Tracer une allure de la courbe C_F. (On précisera la tangante à C en O)

Exercice 4 (4 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

① a) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[1,+\infty[$, par $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1)-\ln(n)\le\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e^{1-\frac{1}{4n}}$.

② a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\le u_n e^{\frac{-1}{4n}}$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}\le u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

③ a) Montrer que pour tout n ∈ ... Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_{n+1}\le u_1 e^{-\frac{1}{4}\ln(n+1)}$

... que (u_n) converge et pr...