Exercice :

A)Soit $g(x)=(x-1)e^{x}+1$

1)Etudier les variations de g et construire sa courbe C dans un r.o.n

2)Etudier la position relative de C et de D :y=x

3)Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C et D

B/ Soit $a \in IR$, on pose $I(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^2}{2} e^t dt$

1°) Mque $0 \leq I(a) \leq e^a . \frac{a^3}{6}$, a > 0 ;

en déduire $\lim_{a\to 0+} \frac{I(a)}{a^2}$

2°) Mque $0 \leq |I(a)| \leq \frac{|a|^3}{6}$ si a < 0 ;

déduire $\lim_{a\to 0-} \frac{I(a)}{a^2}$

3°) En calculant I(a) par une double intégration

par partie montrer que : $e^a = 1+a+\frac{a^2}{2} + I(a)$

C/ Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = \frac{-1+e^{2x}}{x}, & x>0 \\ h(0) = 2 \end{cases}$

1)Mque h est continue et dérivable en 0.

2)Etudier les variations de h

3)Soit $F(x)=\int_1^{\ln x} h(t)dt$ l, $x \geq 1$:

Mque F est dérivable sur $[1, \infty[$ et calculer F'(x)

5)a)Mque $\forall x>3$, on a $F(x) \geq \int_1^{\ln x} \frac{2t-1}{t} dt$

b)En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

c)Dresser le tableau de variation de F,

Calculer F(e) et déduire le signe de F

6)Montrer que $\forall x>1$: $F(x)=\int_e^x \frac{t^2-1}{t\ln t} dt$

7)a)Montrer que $\forall x \geq 9$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{3}}^x \frac{t^2-1}{t\ln t} dt$

b)M qu'il existe $\alpha \in [\frac{x}{3}, x]$ tel que $F(x) \geq \frac{2x}{3} \frac{\alpha^2-1}{\alpha\ln(\alpha)}$

c) Déterminer $\lim_{x\to+} \frac{F(x)}{x}$ puis Construire la courbe β de F.