Exercice 1

Soit θ un réel . Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I et M d'affixes respectives i et $\sin\theta + i(1-\cos\theta)$.

Calculer I M . En déduire l'ensemble des points M lorsque θ décrit IR .

Exercice 2

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On désigne par A et I les points d'affixes respectives 2 et 1 et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon 1 .

1/Construire le cercle $\mathscr{C}$.

2/Montrer l'équivalence : $M(z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z|^2 - (z+\bar{z}) = 0$

Exercice3

Montrer que $(1+i)^n + (1-i)^n$ est un nombre réel .

Exercice 4

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z , $\bar{z}$ et $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

a)Montrer que AB = AC .

Dans la suite on suppose que $z = \sin\theta + i(1-\cos\theta)$ avec $\theta \in]0,\pi[$.

b)Déterminer en fonction de θ le module et un argument de z , de $\bar{z}$ et de $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

c)Déterminer en fonction de θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

d)En déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral .

Exercice 5

Soit z et z' des complexes de module 1 .

1/Montrer que, si $z' \neq z$, $\dfrac{zz'-1}{z'-z}$ est réel et que $\dfrac{z^2-1}{z}$ est imaginaire pur .

2/Soit I, M, M' et M" les points d'affixes respectives 1, z, z' et zz' .

On suppose que $zz' \neq 1$. Montrer que :

- pour $z' \neq z$, les droites (IM") et (MM') sont parallèles .
- pour $z' = z$, (IM") est parallèle à la tangente en M au cercle trigonométrique .

Exercice 6

1/a)Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z suivante: $z^2 - 2i.z - 2 = 0$.

b) Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

2/ Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$, on considère l'équation d'inconnue z complexe :

(E) : $z^2 - 2.e^{i\theta}.z + e^{2i\theta} - 1 = 0$. Résoudre l'équation (E).

3/ Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 2.e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_3 = -1 + e^{i\theta}$.

a)Ecrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b)Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

c)Déterminer le réel θ de $]0,\pi[$ tel que OBAC est un carré.

Lycée Pilote de Tunis	Classes 4 M 2-4-5-6	Le 11/05/2007

Devoir de synthèse N°3

Profs : Mme Dimassi & Mrs Khaled-Zaalani-Masmoudi

Exercice 1 : (4 points)

Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suites pour voir 2 films (a) et (b). Le premier samedi 8 personnes vont voir le film (a) et les autres vont voir le film (b). Le deuxième samedi, 4 personnes décident de revoir le film (a), 2 vont revoir le film (b) et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

1) Après la deuxième séance on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements : A_1 : " La personne interrogée a vu le film (a) le premier samedi "
A_2 : " La personne interrogée a vu le film (a) le deuxième samedi "
B_1 : " La personne interrogée a vu le film (b) le premier samedi "
B_2 : " La personne interrogée a vu le film (b) le deuxième samedi "
   a) Calculer $p(A_1)$ et $p(A_2)$.
   b) Calculer $p(B_1/A_2)$ et $p(A_1/B_2)$.
2) On interroge la première semaine deux personnes simultanément et la deuxième semaine une personne. On note X l'aléa numérique égal au nombre de personnes ayant vu le film (a). Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X) et V(X).

Exercice 2 : (6 points)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r>0$, et F un point intérieur à $\mathscr{C}$. Une droite variable Δ passant par F coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B. On note $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ les paraboles de foyer F et de sommets respectifs A et B.

1) a) Construire les directrices $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ de $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ respectivement.
   b) Montrer que $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ n'ont pas de tangentes communes.
2) a) Montrer que lorsque Δ varie les tangentes aux sommets de $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ restent tangentes à une conique fixe que l'on caractérisera.
   b) Montrer que $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ restent tangentes à une conique fixe que l'on caractérisera.
3) $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ se coupent en deux points I et J.
   a) Montrer que (IJ) est perpendiculaire à Δ.
   b) Construire les points I et J.
4) On fixe Δ et on note K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}_A$. On pose $FK = p$ et soit $\mathscr{R} = (A, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé tel que $\vec{i} = \frac{1}{AF}\overrightarrow{AF}$. Le cercle de centre K et de rayon p coupe $\mathscr{P}_A$ en deux points. Soit M celui d'ordonnée positive, on note $\alpha = \widehat{FKM}$.
   a) Montrer que $MF^2 = 2p^2(1-\cos\alpha)$.
   b) Ecrire une équation de $\mathscr{P}_A$ puis déterminer les coordonnées de M.
   c) En déduire que le réel α est constant.

Problème : (10 points)

Soit f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f_0(x)=e^{-x^2}$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=x^n\,e^{-x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 4 cm).

A) 1) a) Montrer que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}_n$.

b)Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un point fixe I que l'on précisera.

2) Etudier les variations de f_n pour $n\geqslant 2$. En déduire que $\mathscr{C}_n$ admet une unique tangente Parallèle à $(O,\vec{\imath})$ en un point d'abscisse non nulle x_n et d'ordonnée y_n.

3) On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{x}{2}Log\left(\frac{x}{2e}\right)}$.

a) Dresser le tableau de variation de h et vérifier que pour $n\geqslant 2$, $h(n)=y_n$

b) En déduire que $y_n\geqslant y_2$. La suite y est elle convergente ?

B) 1) a) Dresser le tableau de variation de f_1.

b)Ecrire une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de Δ et $\mathscr{C}_1$

2) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ puis tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$.

3) On désigne par $\mathscr{A}_n$ l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par $\mathscr{C}_n$, les axes du repère et la droite $x=1$. $(n\in\mathbb{N})$. Calculer $\mathscr{A}_1$ puis $\mathscr{A}_3$.

4) Montrer que f_0 réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $]0\,;1]$. Expliciter $f_0^{-1}(x)$. En déduire que $\mathscr{A}_0=\frac{1}{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\sqrt{-\mathrm{Log}x}\right)dx$.

C) Soit la fonction $F_n$définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$F_0(x)=\int_0^x f_0(t)dt$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$.

1) Préciser le sens de variation de F_0 et montrer que pour $x\geqslant 0$, $F_0(x)\geqslant 0$.

2) Montrer que pour $t\geqslant 1$, $e^{-t^2}\leqslant e^{-t}$. En déduire que pour $x\geqslant 0$, $F_0(x)\leqslant \mathscr{A}_0+\frac{1}{e}$.

3) Calculer $F_1(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(x)$.

4) Montrer que pour $n\geqslant 2$, $F_n(x)=-\frac{1}{2}x^{n-1}\quad e^{-x^2}+\frac{n-1}{2}F_{n-2}(x)$.

5) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant 0$: $F_{2n+1}(x)=-\frac{n\,!}{2}\,e^{-x^2}\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{x^{2p}}{p!}+n!F_1(x)$.

En déduire la limite de F_{2n+1} quand x tend vers $+\infty$.

6) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$:

$$F_{2n+2}(x)=-\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}\,\frac{e^{-x^2}}{2}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{2^p\,p!\,x^{2p+1}}{(2p+1)!\,2^{n-p}}\right)+\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,n!}F_0(x).$$

En déduire que F_{2n+2} admet une limite finie L quand x tend vers $+\infty$ et que :

$0\leqslant \mathrm{L}\leqslant \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,n!}(\mathscr{A}_0+e^{-1})$.

	LYCEE PILOTE DE SOUSSE LE 7 / 5 / 2005	DEVOIR DE SYNTHESE N°3 MATHEMATIQUES	CLASSE : $4^{ème}$ Math$_{1\text{-}3}$ DUREE : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher.

1) On considère l'épreuve ($\mathcal{E}$) suivante :

« On extrait simultanément deux boules de l'urne, on garde les boules blanches obtenues et on remet les boules noires dans l'urne puis on extrait successivement et sans remise deux boules de l'urne. »

On désigne par X l'aléa qui prend pour valeurs le nombre total des boules blanches obtenues à l'issue des deux tirages.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

2) Un joueur effectue l'épreuve ($\mathcal{E}$) et souhaite obtenir trois boules blanches. On lui propose alors de répéter plusieurs fois l'épreuve et de s'arrêter dès qu'il aura réalisé son vœu. Comme il ne peut jouer indéfiniment alors on lui fixe le nombre maximum n des essais.

a) On prend $n = 5$.

Soit Y l'aléa égal au nombre de essais qu'a effectué ce joueur.

Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) n n'étant plus fixé à 5, on désigne par p_n la probabilité pour que ce joueur réalise son vœu au cours des n essais

Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit supérieur à 0,9.

EXERCICE N°2 (5 points)

On donne dans un plan P un triangle FIJ rectangle et isocèle en F. On pose $FI = a$; $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la famille ($\mathcal{H}$) des hyperboles (H) dont l'un des foyers est F, passant par I et J et tel que I et J n'appartiennent pas à la même branche de (H). On désigne par F' le second foyer de (H).

1) a) Montrer que F' appartient à l'ellipse (E) de foyers I et J et dont la distance des sommets est 2a.

b) Montrer que l'ensemble des points F' est l'ellipse (E) privée des sommets de son petit axe.

2) Soit (H') l'hyperbole de cette famille et qui admet I comme l'un de ses sommets.

a) Construire son second foyer F', son centre O et ses asymptotes D et D'.

b) Calculer sa distance focale FF'.

3) On rapporte le plan P à un repère orthonormé $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$.

a) Montrer qu'une équation de (H') dans le repère R est : $9x^2 - 3y^2 = a^2$

b) Soient F_1 et F_2 les points tel que $FF_1F'F_2$ soit un carré. On désigne par d_1 et d_2 les distances respectives de F_1 et F_2 à une tangente (T) de (H').

Montrer que $d_1^2 + d_2^2$ est une constante que l'on précisera.

PROBLEME (11 points)

Partie A

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right]$. On pose $I(\theta) = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}dx$ et $J(\theta) = \int_0^1 \frac{x - \cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}dx$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0$

2) Calculer $J(\theta)$.

3) On suppose que $\theta \neq \pi$.

On désigne par h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = \sin\theta . \mathrm{tg}x + \cos\theta$

a) Montrer que h est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Cal[illegible] $h^{-1}(0)$ et $h^{-1}(1)$.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $(h$ [illegible] pour [illegible] $\mathbb{R}$.

4) Montrer que : $\forall\ \theta \in \left]0,\pi\right]$ on a : $I(\theta) = \frac{\pi-\theta}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{Log}(x^2 -$ [illegible]

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère [illegible] $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Etudier les variations de f.

2) Montrer que la droite Δ d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de [illegible] de la courbe (C).

Tracer la courbe (C) après avoir étudier ses branches infinies.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ sur un [illegible] K que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in K$. Tracer la courbe représe[illegible] dans le repère R.

4) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\frac{2x^2-x}{x^2-x+1} = 2+\frac{2x-1}{2(x^2-x+1)}$ [illegible]

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe [illegible] abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

5) Calculer $\int_{\text{Log}\frac{?}{?}}^{0} \sqrt{e^x - \frac{3}{4}}\,dx$.

Partie C

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \left]0,\pi\right]$. On considère le nombre complexe [illegible]

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $Z = e^{i\theta} + xe^{2i\theta} + x^2e^{3i\theta} + \cdots\cdots$ [illegible]

2) En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1} = \sin\theta + x\sin 2\theta + \cdots\cdots + x^{n-1}\ldots \frac{[\sin(n+1)\theta - x\sin n\theta]}{\ldots 2x\cos\theta+1}$$

et $$\frac{\cos\theta - x}{x^2-2x\cos\theta+1} = \cos\theta + x\cos 2\theta + \cdots\cdots + x^{\ldots}\ldots n\theta \ldots \frac{[\cos(n+1)\theta - x\cos n\theta]}{\ldots - 2x\cos\theta+1}$$

3) Montrer que : • $\frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sin k\theta}{k} + \int_0^1 \frac{x^n[\sin(n+1)\theta - \ldots \sin n\theta]}{x^2-2x\cos\theta\ldots}$;

• $\forall x \in [0,1]$: $\sin(n+1)\theta - x\sin n\theta$ [illegible]

• $\begin{cases} \left|\int_0^1 \frac{x^n}{x^2-2x\cos\theta+1}dx\right| \leq \frac{1}{(n+1)\sin\ldots} \\ \left|\int_0^1 \frac{x^n}{x^2-2x\cos\theta+1}dx\right| \leq \frac{1}{(n+1)} \end{cases}$

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sin k\theta}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}$

4) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\cos k\theta}{k} = -\text{Log}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$

5) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$

LYCEE PILOTE DE TUNIS	DEVOIR DE SYNTHESE N° 3	Date : Mai 2007 Durée : 4 heures $4^{ème}$ Année MATH(1 et 3)

EXERCICEN°1(5pts)

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1, 2 ; trois boules rouges numérotées 1,1,2 et trois boules vertes numérotées 1,2,2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne .
   a) Calculer la probabilité des événements :
      A : « La somme des numéros est paire »
      B : « Une seule des 3 boules est blanche »
   b) Sachant que la somme des numéros est impaire , quelle est la probabilité qu'une seule des 3 boules tirées soit blanche ?.
2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des numéros marquées sur les trois boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X .
3) On tire successivement trois boules de l'urne de la manière suivantes :
   * Si la boule est rouge elle est remise dans l'urne
   * Sinon , elle n'est pas remise dans l'urne .

   Calculer la probabilité des événements :
      C : « Obtenir une seule boule rouge »
      D : « Obtenir la boule rouge numéro 2 au deuxième tirage pour la première fois ».
4) On recommence trois fois l'expérience précédente en remettant à chaque fois les boules tirées .Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on a obtenu une seule boule rouge.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance.

EXERCICEN°2(5pts)

On donne un rectangle FABC tel que $(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit (T) la médiatrice du segment [AB] et P la parabole de foyer F passant par A et tangente à la droite (T).

1) On suppose que FA > FC.
   a) Déterminer et construire la directrice de la parabole P.
   b) Donner la tangente à la parabole P en A.
   c) Donner deux méthodes de construction géométrique du point de contact M de la tangente (T) avec la parabole P.
   d) Construire le sommet S de P.
2) On suppose que FA=FC =4.
   a) Donner la directrice de la parabole P.
   b) En déduire que (T) est la tangente au sommet de la parabole P
   c) On rapporte le plan à un repère orthonormé $(S,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{SF}$. Donner l'équation de la parabole P dans ce repère.

PROBLEME(10pts)

A) Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{xLogx}{x+1} \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que l'équation x + 1 + Log x = 0 admet dans IR^*_+ une solution unique α avec $0<\alpha<1$.

2) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilite de f en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f et montrer que l'extremum de C_f est sur la droite D : y=-x.

d) Tracer C_f

B) On considère la suite (S_n) définie sur IN^* par : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

1) Montrer que pour tout k de IN^*, $\int_0^{\pi} t^2 \cos kt \, dt = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$

2) Exprimer la somme S_n à l'aide d'une integrale

3) a) montrer que pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a : $\sum_{k=1}^{k=n} e^{ikt} = \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} e^{i\frac{n+1}{2}t}$

b) En déduire que pour tout $t \in]0,2\pi[$: $\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$.

(On rappelle que $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$)

4) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(t) = \frac{t^2}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Verifier que pour tout n de IN^*, $S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t \, dt$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction dérivable et à dérivée continue sur $[0, \pi]$,on a pour tout n de IN* :

$$\left|\int_0^{\pi} h(t)\sin(n+\frac{1}{2})t \, dt\right| \leq \frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}}$$ avec $M=\max|h'(t)|$ pour t de $[0, \pi]$

c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{12}$

C) Pour tout k de IN* . On considère la fonction f_k définie par : $\begin{cases} f_k(x) = x^k \operatorname{Log} x & \text{si } x > 0 \\ f_k(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f_1 sur [0,1].

b) Pour k>1, montrer que f_k est dérivable sur [0,1] et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1}.

2) Pour tout k de IN^*, on pose $I_k = \int_0^1 f_k(x)dx$.

Calculer I_k

3) a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 (-x)^n f(x)dx$

b) Montrer que $\left|\int_0^1 (-x)^n f(x)dx\right| \leq \frac{\alpha}{n+1}$.

c) Déduire que $\left|\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k\right| \leq \frac{\alpha}{n+1}$

4) Calculer alors la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$.

Lycée Pilote de Tunis	Classes 4 M 2-4-5-6	Le 11/05/2007

Devoir de synthèse N°3

Profs : Mme Dimassi & Mrs Khaled-Zaatani-Masmoudi

Exercice 1 : (4 points)

Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suites pour voir 2 films (a) et (b). Le premier samedi 8 personnes vont voir le film (a) et les autres vont voir le film (b). Le deuxième samedi, 4 personnes décident de revoir le film (a), 2 vont revoir le film (b) et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

1) Après la deuxième séance on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements : A_1 : " La personne interrogée a vu le film (a) le premier samedi "
   A_2 : " La personne interrogée a vu le film (a) le deuxième samedi "
   B_1 : " La personne interrogée a vu le film (b) le premier samedi "
   B_2 : " La personne interrogée a vu le film (b) le deuxième samedi "
   a) Calculer $p(A_1)$ et $p(A_2)$.
   b) Calculer $p(B_1/A_2)$ et $p(A_1/B_2)$.
2) On interroge la première semaine deux personnes simultanément et la deuxième semaine une personne. On note X l'aléa numérique égal au nombre de personnes ayant vu le film (a). Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X) et V(X).

Exercice 2 : (6 points)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r > 0$, et F un point intérieur à $\mathscr{C}$. Une droite variable Δ passant par F coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B. On note $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ les paraboles de foyer F et de sommets respectifs A et B.

1) a) Construire les directrices $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ de $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ respectivement.
   b) Montrer que $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ n'ont pas de tangentes communes.
2) a) Montrer que lorsque Δ varie les tangentes aux sommets de $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ restent tangentes à une conique fixe que l'on caractérisera.
   b) Montrer que $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ restent tangentes à une conique fixe que l'on caractérisera.
3) $\mathscr{P}_A$ et $\mathscr{P}_B$ se coupent en deux points I et J.
   a) Montrer que (IJ) est perpendiculaire à Δ.
   b) Construire les points I et J.
4) On fixe Δ et on note K le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}_A$. On pose $FK = p$ et soit $\mathscr{R} = (A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{AF}\overrightarrow{AF}$. Le cercle de centre K et de rayon p coupe $\mathscr{P}_A$ en deux points. Soit M celui d'ordonnée positive, on note $\alpha = \widehat{FKM}$.
   a) Montrer que $MF^2 = 2p^2(1-\cos\alpha)$.
   b) Ecrire une équation de $\mathscr{P}_A$ puis déterminer les coordonnées de M.
   c) En déduire que le réel α est constant.

Problème : (10 points)

Soit f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f_0(x)=e^{-x^2}$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=x^n\,e^{-x^2}$. On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

A) 1) a) Montrer que la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}_n$.

b) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un point fixe I que l'on précisera.

2) Etudier les variations de f_n pour $n\geqslant 2$. En déduire que $\mathscr{C}_n$ admet une unique tangente Parallèle à $(O,\vec{i})$ en un point d'abscisse non nulle x_n et d'ordonnée y_n.

3) On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{x}{2}Log\left(\frac{x}{2e}\right)}$.

a) Dresser le tableau de variation de h et vérifier que pour $n\geqslant 2$, $h(n)=y_n$

b) En déduire que $y_n\geqslant y_2$. La suite y est elle convergente ?

B) 1) a) Dresser le tableau de variation de f_1.

b) Ecrire une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de Δ et $\mathscr{C}_1$

2) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ puis tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$.

3) On désigne par $\mathscr{A}_n$ l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par $\mathscr{C}_n$, les axes du repère et la droite $x=1$. ($n\in\mathbb{N}$). Calculer $\mathscr{A}_1$ puis $\mathscr{A}_3$.

4) Montrer que f_0 réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $]0\,;1]$. Expliciter $f_0^{-1}(x)$. En déduire que $\mathscr{A}_0=\frac{1}{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\sqrt{-\text{Log}x}\right)dx$.

C) Soit la fonction F_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$F_0(x)=\int_0^x f_0(t)dt \text{ et pour } n\in\mathbb{N}^*,\ F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt.$$

1) Préciser le sens de variation de F_0 et montrer que pour $x\geqslant 0$, $F_0(x)\geqslant 0$.

2) Montrer que pour $t\geqslant 1$, $e^{-t^2}\leqslant e^{-t}$. En déduire que pour $x\geqslant 0$, $F_0(x)\leqslant \mathscr{A}_0+\frac{1}{e}$.

3) Calculer $F_1(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)$.

4) Montrer que pour $n\geqslant 2$, $F_n(x)=-\frac{1}{2}x^{n-1}\;e^{-x^2}+\frac{n-1}{2}F_{n-2}(x)$.

5) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant 0$: $F_{2n+1}(x)=-\frac{n!}{2}e^{-x^2}\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{x^{2p}}{p!}+n!F_1(x)$.

En déduire la limite de F_{2n+1} quand x tend vers $+\infty$.

6) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$:

$$F_{2n+2}(x)=-\frac{(2n+1)!}{2^n n!}\frac{e^{-x^2}}{2}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{2^p p!x^{2p+1}}{(2p+1)!2^{n-p}}\right)+\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}F_0(x).$$

En déduire que F_{2n+2} admet une limite finie L quand x tend vers $+\infty$ et que :

$$0\leqslant \text{L}\leqslant \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}(\mathscr{A}_0+e^{-1}).$$

L. P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°3**	**Prof: Chouihi**
Le : 11- 05- 07	**Durée : 4heures**	**Classe: 4M**

Exercice N°1 (6 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, D le symétrique de B par rapport à (AC) et I le milieu du segment [AD].

1°) Soit S la similitude directe de centre I qui transforme A en C.

a) Caractériser S.

b) La droite (IC) coupe (AB) en G, montrer que S(D) = G.

2°) Soit P la parabole de foyer A et de directrice la droite (DK), où K est le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).

a) Montrer que $C \in P$ et que (CG) est une tangente à P.

b) Déterminer l'image de la droite (DK) par la similitude S. En déduire l'image P' de la parabole P par S.

c) Montrer que la droite (IA) est tangente à P'.

3°) Soit E l'ellipse de foyers A et B et tangente à (GC).

a) Déterminer le grand axe de l'ellipse E.

b) Déterminer et construire le point de contact M de E avec (GC).

c) Déterminer l'image de M par S.

4°) Existe-t-il une hyperbole de foyer A et B tangente à la droite (GC) ?

Exercice N°2 (4 points)

Un dé cubique A porte sur ses faces les nombres : -2, 1, 1, 1, 2n et – n où $n \in \mathbb{Z}$. à chaque lancer les faces de A ont la même probabilité d'apparition.

1°) On lance une fois le dé A et on note le nombre obtenu, On définit ainsi une aléa numérique X..

a/ Déterminer la loi de probabilité de X.

b/ Calculer E(X). Déterminer la valeur de n pour que E(X) = 0.

2°) Dans toute la suite on suppose n = -1 .
On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules blanches et deux boules rouges et d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et trois boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On considère l'épreuve suivante : on lance le dé A, si on obtient le nombre (-2) alors on tire successivement et avec remise trois boules de U_1 et si on obtient le nombre 1 alors on tire successivement et sans remise trois boules de U_2 .

a/ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « obtenir une seule boule rouge sachant qu'on lançant le dé A on a obtenu (-2) »

E_2 : « obtenir une seule boule rouge »

b/ On répète trois fois de suite l'épreuve précédente en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans leur urne.
Déterminer la loi de probabilité de l'aléa numérique Y qui prend pour valeur : 4 si aucun des épreuves ne donne « une seule boule rouge » si non le rang de la dernière épreuve qui donne « une seule boule rouge ».

Problème (10 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 2x^{2n+1}e^{-x^2}$, et soit C_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1°) Préciser la parité de f_n.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

3°) a) Dresser le tableau de variations de f_0 sur $[0, +\infty[$.

b) On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = 4x^{2n}(n + \frac{1}{2} - x^2)e^{-x^2}$ puis dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, +\infty[$.

4°) a) Etudier, sur $\mathbb{R}_+$, la position relative de C_0 et C_1.

b) Construire les courbes C_0 et C_1 dans le même repère (prendre pour unité : 2cm).

5°) a) On pose $g(x) = x^2e^{-x^2}$. Calculer $g'(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire l'aire, en cm², de la partie $\mathcal{D}$ du plan limitée par les courbes C_0 et C_1 et les droites d'équations respectives : $x = -1$ et $x = 1$.

Partie B

On suppose dans cette partie que n est un entier naturel non nul.

Soit F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ et soit G_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G_n(x) = F_n(\sqrt{\text{Log}x})$.

1) Montrer que F_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et préciser $F_n'(x)$.

2) Montrer que G_n est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x \in]1, +\infty[$, $G_n'(x) = \dfrac{(\text{Log}x)^n}{x^2}$.

3) a) Montrer que : $\forall x \in]1, e^{n+\frac{1}{2}}]$ et $\forall t \in [0, \sqrt{\text{Log}x}]$, $0 \le f_n(t) \le 2\dfrac{(\text{Log}x)^{n+\frac{1}{2}}}{x}$.

b) En déduire que : $\forall x \in]1, e^{n+\frac{1}{2}}]$, $0 \le G_n(x) \le 2\dfrac{(\text{Log}x)^{n+1}}{x}$.

c) Montrer que G_n est dérivable à droite en 1 et que : $G_n'(1) = 0$.

4) a) Vérifier que la fonction dérivée G_n' est continue sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $G_n(x) = \int_1^x \dfrac{(\text{Log}t)^n}{t^2}dt$.

5) a) Calculer $G_1(x)$ en fonction de x et déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} G_1(x) = 1$.

b) En intégrant par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [1, +\infty[$ on a :

$$G_{n+1}(x) = -\frac{(\text{Log}x)^{n+1}}{x} + (n+1)G_n(x)$$

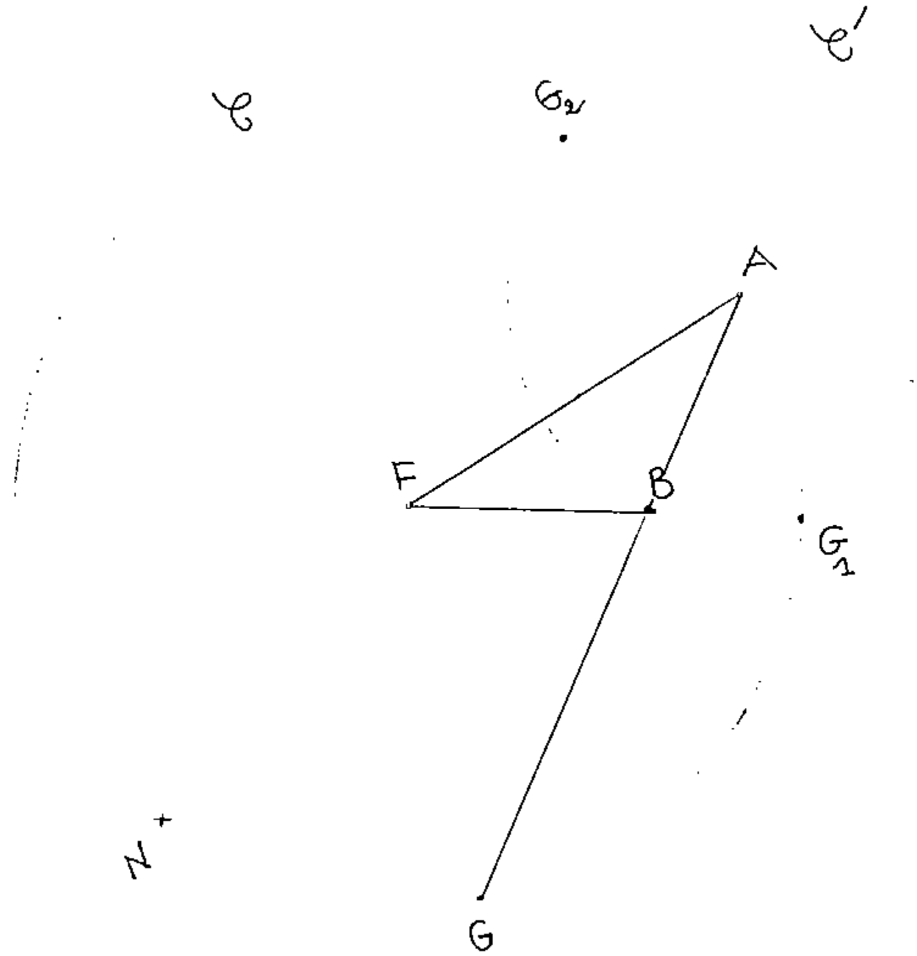
c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et que : $L_{n+1} = (n+1)L_n$.

d) En déduire que $L_n = n\,!$

6) a) Dresser le tableau de variations de G_2.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{G_2(x)}{x}$.

c) Donner l'allure de G_2 dans un autre repère que celui de la partie A/.


$\mathcal{C}$
G_2
$\mathcal{C}'$
A
F
B
G_1
N
G

L. P. Kairouan	Devoir de synthèse N°3	Prof: Chouihi
Le : 11- 05- 07	Durée : 4heures	Classe: 4M

Exercice N°1 (6 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, D le symétrique de B par rapport à (AC) et I le milieu du segment [AD].

1°) Soit S la similitude directe de centre I qui transforme A en C.
  a) Caractériser S.
  b) La droite (IC) coupe (AB) en G, montrer que S(D) = G.

2°) Soit P la parabole de foyer A et de directrice la droite (DK), où K est le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).
  a) Montrer que $C \in P$ et que (CG) est une tangente à P.
  b) Déterminer l'image de la droite (DK) par la similitude S. En déduire l'image P'de la parabole P par S.
  c) Montrer que la droite (IA) est tangente à P'.

3°) Soit E l'ellipse de foyers A et B et tangente à (GC).
  a) Déterminer le grand axe de l'ellipse E.
  b) Déterminer et construire le point de contact M de E avec (GC).
  c) Déterminer l'image de M par S.

4°) Existe-t-il une hyperbole de foyer A et B tangente à la droite (GC) ?

Exercice N°2 (4 points)

Un dé cubique A porte sur ses faces les nombres : -2, 1, 1, 1, 2n et $-n$ où $n \in \mathbb{Z}$. à chaque lancer les faces de A ont la même probabilité d'apparition.

1°) On lance une fois le dé A et on note le nombre obtenu. On définit ainsi une aléa numérique X..
  a/ Déterminer la loi de probabilité de X.
  b/ Calculer E(X). Déterminer la valeur de n pour que E(X) = 0.

2°) Dans toute la suite on suppose $n = -1$.
On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules blanches et deux boules rouges et d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et trois boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On considère l'épreuve suivante : on lance le dé A, si on obtient le nombre (-2) alors on tire successivement et avec remise trois boules de U_1 et si on obtient le nombre 1 alors on tire successivement et sans remise trois boules de U_2 .
  a/ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
    E_1 : « obtenir une seule boule rouge sachant qu'on lançant le dé A on a obtenu (-2) »
    E_2 : « obtenir une seule boule rouge »
  b/ On répète trois fois de suite l'épreuve précédente en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans leur urne.
Déterminer la loi de probabilité de l'aléa numérique Y qui prend pour valeur : 4 si aucun des épreuves ne donne « une seule boule rouge » si non le rang de la dernière épreuve qui donne « une seule boule rouge ».

Problème (10 points)

Soit $n\in IN$ et f_n la fonction définie sur IR par : $f_n(x)=2x^{2n+1}e^{-x^2}$, et soit C_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1°) Préciser la parité de f_n.

2°) Montrer que pour tout $n\in IN$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.

3°) a) Dresser le tableau de variations de f_0 sur $[0,+\infty[$.

b) On suppose que $n\in IN^*$, montrer que pour tout $x\in IR_+$, $f_n'(x)=4x^{2n}(n+\frac{1}{2}-x^2)e^{-x^2}$ puis dresser le tableau de variations de f_n sur $[0,+\infty[$.

4°) a) Etudier, sur IR_+, la position relative de C_0 et C_1.

b) Construire les courbes C_0 et C_1 dans le même repère (prendre pour unité : 2cm).

5°) a) On pose $g(x)=x^2e^{-x^2}$. Calculer $g'(x)$; $x\in IR$.

b) En déduire l'aire, en cm², de la partie $\mathcal{D}$ du plan limitée par les courbes C_0 et C_1 et les droites d'équations respectives : $x=-1$ et $x=1$.

Partie B

On suppose dans cette partie que n est un entier naturel non nul.

Soit F_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$ et soit G_n la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G_n(x)=F_n(\sqrt{Logx})$.

1) Montrer que F_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et préciser $F_n'(x)$.

2) Montrer que G_n est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\forall x\in]1,+\infty[$, $G_n'(x)=\frac{(Logx)^n}{x^2}$.

3) a) Montrer que : $\forall x\in]1, e^{n+\frac{1}{2}}]$ et $\forall t\in[0,\sqrt{Logx}]$, $0\le f_n(t)\le 2\frac{(Logx)^{n+\frac{1}{2}}}{x}$.

b) En déduire que : $\forall x\in]1, e^{n-\frac{1}{2}}]$, $0\le G_n(x)\le 2\frac{(Logx)^{n+1}}{x}$.

c) Montrer que G_n est dérivable à droite en 1 et que : $G_n'(1)=0$.

4) a) Vérifier que la fonction dérivée G_n' est continue sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que : $\forall x\in[1,+\infty[$, $G_n(x)=\int_1^x\frac{(Logt)^n}{t^2}dt$.

5) a) Calculer $G_1(x)$ en fonction de x et déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} G_1(x)=1$.

b) En intégrant par parties, montrer que : $\forall n\in IN^*$ et $\forall x\in[1,+\infty[$ on a :

$$G_{n+1}(x)=-\frac{(Logx)^{n+1}}{x}+(n+1)G_n(x)$$

c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in IN^*$, $G_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et que : $L_{n+1}=(n+1)L_n$.

d) En déduire que $L_n=n$!

6) a) Dresser le tableau de variations de G_2.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{G_2(x)}{x}$.

c) Donner l'allure de G_2 dans un autre repère que celui de la partie A/.

Ex 3

1) $f = S\left(B, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

EGB est rectangle isocèle

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

et $\frac{BG}{BE} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow f(E) = G$

ABF est rectangle isocèle en A

$\Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

et $\frac{BA}{BF} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(F) = A$

2) g est une similitude directe

$g : A \longmapsto F$

$F \longmapsto B$

a) $K = \frac{FB}{AF} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$

$(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB}}) \equiv -\pi + (\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}})\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

b) $g \circ g$ est une similitude directe de rapport $(\sqrt{2})^2 = 2$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \left(-\frac{3\pi}{4}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

c) $\tan(\widehat{ABI}) = \frac{AI}{AB} = \frac{AI}{AF} = \frac{1}{2}$

Dans le triangle rectangle AGB

$\tan(\widehat{ABG}) = \tan(\widehat{ABI})$

$\frac{GA}{GB} = \frac{1}{2} \Rightarrow GB = 2\,GA$

... principale

b) ~~$g \circ g$ est une similitude directe de rapport $(\sqrt{2})^2 = 2$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \left(-\frac{3\pi}{4}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$~~

b) $g \circ g : A \longmapsto B$

Soit Ω le centre de g

~~$\Rightarrow \Omega$ est le centre de $g \circ g$.~~

~~$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$~~

$\frac{\Omega B}{\Omega A} = 2$ or

Soit $S\left(G, 2, \frac{\pi}{2}\right)$

$(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

$\frac{GB}{GA} = 2 \Rightarrow S(A) = B$

or $g \circ g\,(A) = B$

$g \circ g$ et S ont le même rapport et le même angle et coïncident en A

$\Rightarrow g \circ g = S$

$\Rightarrow G$ est le centre de $g \circ g$

$\Rightarrow G$ est le centre de g.

3a) f est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

g est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

$\Rightarrow h$ est une similitude de rapport 1 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

$h(F) = g \circ f(F) = g(f(F)) = g(A)$

$= F$

$\Rightarrow h = R\left(F, -\frac{\pi}{2}\right)$

b) $h(E) = g \circ f(E) = g(f(E)) = g(G)$

$= G$

$-\frac{\pi}{}\ [2\pi]$

EGB est rectangle isocèle en G

$H = B * E$

$\Rightarrow HE = HG$

$(GH) \perp (EB)$ (hauteur d'un triangle isocèle)

$\Rightarrow$ GHE est isocèle rectangle en H

$\Rightarrow EH = \frac{\sqrt{2}}{2} EG$ et $EF = \frac{\sqrt{2}}{2} EG$

$\Rightarrow EF = EH$

EFGH est un losange

et $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

EFGH est un carré.

Ex 4 : p 2011.

$I(-1)$ $M(z)$ $N(z^2)$ $P(z^3)$

$z \notin \{0, -1, 1\}$

a) MNP rectangle en P

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ orthogonales.

$\Rightarrow \frac{z_P - z_M}{z_P - z_N}$ imaginaire pur

$\Rightarrow \frac{z^3 - z}{z^3 - z^2}$ //

$\Rightarrow \frac{z^2 - 1}{z(z-1)}$ //

$\Leftrightarrow \frac{(z+1)(z-1)}{z(z-1)}$

$\Rightarrow \frac{z+1}{z}$ //

b) $z = x + iy$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{1+z}{z} = \frac{1 + (x+iy)}{\ldots}$

$= \frac{1 + (x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$

$= \frac{x - iy + (x+iy)(x-iy)}{x^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$

c) $M \in (\Gamma)$

$\Leftrightarrow$ MNP rectangle

$\Leftrightarrow \frac{1+z}{z}$ im pur

$\Leftrightarrow \begin{cases} Re\left(\frac{1+z}{z}\right) = 0 \\ Im\left(\frac{1+z}{z}\right) \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2} = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Gamma = \mathcal{C}\left(I\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}\right)$

(logo)	LYCEE PILOTE DE SOUSSE Le 12 / 05 / 2006	Devoir de synthèse N°3 MATHEMATIQUES	CLASSE : $4^{ème}$ Math DUREE : 4 heures

EXERCICE N°1

On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules blanches et deux boules noires et d'une urne U_2 contenant trois boules noires et deux boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue une série de tirages d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine de la manière suivante

- la première boule est tirée de U_1
- si à un tirage on obtient une boule blanche alors le tirage suivant s'effectue dans U_1 sinon il s'effectue dans U_2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « tirer une boule blanche au $n^{ième}$ tirage » et p_n sa probabilité.

1/ a) Déterminer $P(B_{n+1} \setminus B_n)$ et $P(B_{n+1} \setminus \overline{B_n})$

b) Montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$.

c) Soit la suite de terme général $U_n = p_n - \frac{1}{2}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que U est une suite géométrique.

En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

2. On effectue une série de trois tirages et on désigne par X la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

3. Quatre personnes effectuent chacune une série de trois tirages en commençant par tirer une boule de U_1.

On désigne par Y la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant obtenu trois boules noires.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique E(Y).

b) Sachant qu'aucune des quatre personnes n'a obtenu trois boules noires, quelle est la probabilité pour que chacune d'entre elles ait obtenu une seule boule blanche ?

EXERCICE N°2

OBFC est un carré de centre I et de côté x ($x \in \mathbb{R}_+^*$). On note J le symétrique de I par rapport à O.

Soit $(\mathcal{H})$ la famille des hyperboles (H) dont l'un des foyers est F et tangentes aux deux droites (OB) et (OC).

On désigne par Ω le centre de (H). F' son second foyer, 2c sa distance focale et 2a la distance des ses sommets.

1. a) Montrer que l'ensemble des points Ω est la demi-droite [IO) privée de I et O

b) En déduire l'ensemble des points F'

2. On prend Ω = J et on note $(\mathscr{H})$ l'hyperbole de la famille $(\mathcal{H})$ correspondante.

a) Construire les éléments géométriques de $(\mathscr{H})$ ainsi que ses points de contact avec (OB) et (OC).

b) Soit P un point du plan par où l'on peut mener à $(\mathscr{H})$ deux tangentes perpendiculaires (T_1) et (T_2).

i) Montrer que le cercle de centre P et passant par F et le cercle de centre F' et de rayon 2a se coupent en deux points N_1 et N_2 tel que P soit le milieu du segment $[N_1N_2]$.

ii) En déduire que $F'P^2 - FP^2 = 4a^2$

iii) Montrer que l'ensemble des P points est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et passant par O privé de quatre points que l'on précisera.

3. Ω étant un point quelconque de la demi-droite [IO) privée de I et O.

a) Montrer que $a^2 = c^2 + x^2 - cx\sqrt{2}$

b) Soient M l'un des points d'intersection du cercle directeur de l'hyperbole (H) relatif au foyer F' et de la perpendiculaire à (OF) en F. Δ la perpendiculaire à (OF) en O et H le projeté orthogonal de M sur Δ.

i) Montrer que $F'M^2 - HM^2 = 2x^2$

ii) En déduire que lorsque Ω varie, le point M se déplace sur une hyperbole (Γ) dont on précisera les éléments géométriques.

PROBLEME

I. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = e^{-\tan x}$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Montrer que f est continue sur I.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.

3/ Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et soit (C') sa courbe représentative dans le repère R.

Déterminer le domaine de dérivabilité K de f^{-1} et montrer que : $\forall x \in K$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x(1 + \ln^2 x)}$

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{24}$

b) Tracer les courbes (C) et (C').

5/ Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On désigne par Γ la courbe représentative de g dans le repère R.

a) Montrer que Γ est l'image de (C') par une rotation que l'on caractérisera.

b) En déduire que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} g(t)\,dt = \int_{0}^{1} f^{-1}(t)\,dt$.

6/ Soit $\mathcal{D}$ le domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes de coordonnées.

Montrer que la mesure de l'aire de $\mathcal{D}$ est : $A(\mathcal{D}) = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt - \alpha^2$.

II. Soit F la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

1/ Montrer que F est continue sur I.

2/ a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 1 + u$.

b) En déduire que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $F(x) \leq x + \ln(\cos x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} F(x)$.

3/ a) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan t \geq t$. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) \leq 1 - e^{-x}$

b) Montrer que : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$

4/ Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative. (on prendra $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.6$)

5/ a) Montrer que : $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(t) \geq -\frac{2}{e}t - \frac{\pi - 2}{2e}$

b) En déduire que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $-\frac{1}{e}x^2 - \frac{\pi - 2}{2e}x \leq F(x)$

c) Donner alors un encadrement de $A(\mathcal{D})$. (on prendra $\alpha = 0,54$).

III. On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_{1}^{e} t(1 + \ln^n t)\,dt$

1/ Etudier la monotonie de la suite U. En déduire qu'elle est convergente.

2/ a) Calculer U_1.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{n+5}{4}e^2 - \frac{n+3}{4} - \frac{n+1}{2}U_n$

c) En déduire la valeur de $\int_{1}^{e} f'(f^{-1}(t))\,dt$

3/ Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\frac{n+5}{2(n+3)}e^2 - \frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n+4}{2(n+2)}e^2 - \frac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

PROBLEME

A/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = e^{-\tan x}$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Montrer que f est continue sur I.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.

3/ Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et soit (C') sa courbe représentative dans de repère R.

Déterminer le domaine de dérivabilité K de f^{-1} et montrer que : $\forall x \in K$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x(1+\ln^2 x)}$

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{24}$

b) Tracer les courbes (C) et (C').

5/ Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On désigne par Γ la courbe représentative de g dans le repère R.

a) Montrer que Γ est l'image de (C') par une rotation que l'on caractérisera.

b) En déduire que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} g(t)\,dt = \int_0^1 f^{-1}(t)\,dt$.

6/ Soit $\mathcal{D}$ le domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes de coordonnées.

Montrer que la mesure de l'aire de $\mathcal{D}$ est : $A(\mathcal{D}) = 2\int_0^{\alpha} f(t)\,dt - \alpha^2$.

B/ Soit F la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

1/ Montrer que F est continue sur I.

2/ a) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \geq 1 + u$.

b) En déduire que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $F(x) \leq x + \ln(\cos x)$. Calculer alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} F(x)$.

3/ a) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan t \geq t$. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) \leq 1 - e^{-x}$

b) Montrer que : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$

4/ Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative. (on prendra $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.6$

5/ a) Montrer que : $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(t) \geq -\frac{2}{e}t - \frac{\pi - 2}{2e}$

b) En déduire que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $-\frac{1}{e}x^2 - \frac{\pi + 2}{2e}x \leq F(x)$

c) Donner alors un encadrement de $A(\mathcal{D})$. (on prendra $\alpha = 0,54$).

C/ On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^e t(1 + \ln^n t)\,dt$

1/ Etudier la monotonie de la suite U. En déduire qu'elle est convergente.

2/ a) Calculer U_1.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{n+5}{4}e^2 - \frac{n+3}{4} - \frac{n+1}{2}U_n$

c) En déduire la valeur de $\int_1^e f'(f^{-1}(t))\,dt$

3/ Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\frac{n+5}{2(n+3)}e^2 - \frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n+4}{2(n+2)}e^2 - \frac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N°1

On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules blanches et deux boules noires et d'une urne U_2 contenant trois boules noires et deux boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue une série de tirages d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine de la manière suivante

- la première boule est tirée de U_1
- si à un tirage on obtient une boule blanche alors le tirage suivant s'effectue dans U_1 sinon il s'effectue dans U_2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « tirer une boule blanche au $n^{ième}$ tirage » et p_n sa probabilité.

1/ a) Déterminer $P(B_{n+1} / B_n)$ et $P(B_{n+1} \setminus \overline{B_n})$

b) Montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$.

c) Soit U la suite de terme général $U_n = p_n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que U est une suite géométrique.

En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

2/ On effectue une série de trois tirages et on désigne par X la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

3/ Quatre personnes effectuent chacune une série de trois tirages en commençant par tirer une boule de U_1.
On désigne par Y la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant obtenu trois boules noires.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique E(Y).

b) Sachant qu'aucune des quatre personnes n'a obtenu trois boules noires, quelle est la probabilité pour que chacune d'entre elles ait obtenu une seule boule blanche ?

EXERCICE N°2

OBFC est un carré de centre I et de côté x ($x \in \mathbb{R}^*_+$). On note J le symétrique de I par rapport à O.

Soit $(\mathcal{H})$ la famille des hyperboles (H) dont l'un des foyers est F et tangentes aux deux droites (OB) et (OC).
On désigne par Ω le centre de (H). F' son second foyer, 2c sa distance focale et 2a la distance des ses sommets.

1/ a) Montrer que l'ensemble des points Ω est la demi-droite [IO) privée de I et O

b) En déduire l'ensemble des points F'

2/ On prend $\Omega = J$ et on note $(\mathscr{H})$ l'hyperbole de la famille $(\mathcal{H})$ correspondante.

a) Construire les éléments géométriques de $(\mathscr{H})$ ainsi que ses points de contact avec (OB) et (OC).

b) Soit P un point du plan par où l'on peut mener à $(\mathscr{H})$ deux tangentes perpendiculaires (T_1) et (T_2).

i) Montrer que le cercle de centre P et passant par F et le cercle de centre F' et de rayon 2a se coupent en deux points N_1 et N_2 tel que P soit le milieu du segment $[N_1N_2]$.

ii) En déduire que $F'P^2 + FP^2 = 4a^2$

iii) Montrer que l'ensemble des P points est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et passant par O privé de quatre points que l'on précisera.

3/ Ω étant un point quelconque de la demi-droite [IO) privée de I et O.

a) Montrer que $a^2 = c^2 - x^2 - cx\sqrt{2}$.

b) Soient M l'un des points d'intersection du cercle directeur de l'hyperbole (H) relatif au foyer F' et de la perpendiculaire à (OF) en F', Δ la perpendiculaire à (OF) en O et H le projeté orthogonal de M sur Δ.

i) Montrer que $F'M^2 - HM^2 = 2x^2$.

ii) En déduire que lorsque Ω varie, le point M se déplace sur une hyperbole (Γ) dont on précisera les éléments géométriques.

Lycée Pilote de l'Ariana	*Devoir de synthèse 3*	*4ème Année*
Le : 12/5/2006		*Durée : 4H*

Exercice 1 (5 points)

Une urne U_1 contient : 2 boules rouges et 3 boules blanches
et une urne U_2 contient : 3 boules blanches et 2 boules rouges.
Une épreuve consiste à tirer une boule de U_1 :

- Si elle est blanche, on la place dans U_2 puis on effectue un $2^{ème}$ tirage de deux boules simultanément de U_2
- Si elle est rouge, on la remet dans U_1, puis on effectue un $2^{ème}$ tirage de deux boules de la façon suivante : on tire une boule de U_1 puis une boule de U_2.

1) a) Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur de U_2.
b) Montrer alors que la probabilité de l'événement :

A : « Tirer deux boules de même couleur au cours de deuxième tirage » est $\frac{61}{125}$.

2) On désigne par X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules blanches tirées dans le deuxième tirage.
a) Donner la loi de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X
c) Définir la fonction de répartition de X et la construire.
3) On répète l'épreuve précédente 5 fois de suite en remettant les boules tirées dans leurs urnes respectives après chaque épreuve. On désigne par Y le nombre de fois où A réalisés.
a) Calculer $p (Y \geq 1)$
b) Donner l'écart type de Y.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathscr{C} : x^2 = 4 + 4y^2$.

1) a/ Donner la nature de $\mathscr{C}$.
b/ Préciser ses foyers et ses sommets.
c/ Construire $\mathscr{C}$.

2) Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation (E) :

$(\cos^2\theta) z^2 - 4 (\cos\theta) z + 5 - \cos^2\theta = 0$.

a/ Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
b/ Préciser pour quelle valeur de θ l'équation (E) admet une racine double. Donner la valeur de cette racine double.
c/ M_1 et M_2 sont les points de P dont les affixes respectives sont les nombres z_1 et z_2 solution de (E). Montrer que lorsque θ varie, M_1 et M_2 se déplacent sur une branche de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

Problème :(10 points)

A/

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = \text{Log}\,[(1+x)^2] - \frac{x}{x+1}$.
a/ Etudier les variations de g.
b/ En déduire que $g(x) > 0$ pour $x > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right), \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Montrer que f est continue sur IR+.

b/ Montrer que f est dérivable sur IR+, et que $f'(x) = x\, g(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.

c/ Dresser le tableau de variation de f.

d/ En déduire que f admet une fonction réciproque h définie sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a/ Montrer que pour tout $t \in IR_+$ on a : $\text{Log}(1+t) \le t$.

b/ Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite D : y=x.

4) Pour tout $x \in IR_+$ on pose $\varphi(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$.

a/ Montrer que : $0 \le \varphi(x) \le \frac{x^3}{3}$.

b/ Montrer que $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} - x + \text{Log}(1+x)$.

c/ Déduire $\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{Log}(1+x) - x}{x^2}$.

5) a/ Montrer que $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x - \frac{1}{2})] = 0$.

b/ Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\Delta : y = x - \frac{1}{2}$.

6) Tracer dans le même repère R, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_h$ et Δ.

7) Soit a un réel de [0,1] et A(a) l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations y=0, x = a et x =1. Calculer A(a) puis $\lim_{a \to 0^+} A(a)$.

B/ On considère la suite (U_n) définie sur IN par :

$U_n = \int_0^{\text{Log}2} h(x)e^{-nx}\,dx$ si $n > 0$ et $U_0 = \frac{1}{3}\text{Log}\,2 + \frac{1}{6}$.

1) Montrer que la suite U est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a/ Montrer que $\forall x \in [0, \text{Log}2]$ on a : $0 \le h(x) \le 1$.

b/ En déduire que $\forall\ n > 0$ on a : $0 \le U_n \le \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{2^n})$.

c/ Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k U_k$.

a/ Montrer que pour tout $x \in IR_+$ on a : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx} = \frac{1+(-1)^n e^{-(n+1)x}}{e^{-x}+1}$.

b/ Montrer que : $S_n = \int_0^{\text{Log}2} [\frac{1+(-1)^n e^{-(n+1)x}}{e^{-x}+1}] h(x)dx$.

4) On pose $I = \int_0^{\text{Log}2} \frac{h(x)}{e^{-x}+1}dx$.

a/ Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $|S_n - I| \le U_{n+1}$.

b/ En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Lycée Pilote de Tunis	Classes : 4 maths	Le 06/03/2007 Durée 4 heures

Devoir de Synthèse N°2

Mathématiques

Exercice 1 : (5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré $AFED$ de centre O, de coté 4 et tel que $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note $B = S_F(A)$ et on désige par I et J les milieux respectifs de $[AF]$ et $[OI]$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en F et B en E.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que $S = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$.
   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que $S \circ S(B) = O$ et en déduire une construction de Ω.
   d) On note $\mathcal{R} = (I,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct tel que $\vec{u} = \frac{1}{IF}\overrightarrow{IF}$. Déterminer la transformation complexe associée à S et en déduire l'affixe de Ω.
2) soit $L = S_I(J)$ et $(\mathscr{E})$ l'ellipse de sommets A, F, J et L.
   a) Construire les foyers F_1 et F_2 de $(\mathscr{E})$ avec $F_1 \in [IF]$.
   b) Soit $F_1' = S(F)$. Montrer que $(\Omega F_1')$ est tangente à $(\mathscr{E})$.
   c) Donner une équation de $(\mathscr{E})$ dans $\mathcal{R}$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre F et de rayon $r>0$ et K un point intérieur à $\mathscr{C}$ et distinct de F. On construit le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre K et tangent à $\mathscr{C}$ en un point I.

1) Soit A un point de $\mathscr{C}_1\setminus\{I\}$.
   a) Montrer que A est le second foyer d'une ellipse (E) passant par K et de cercle directeur $\mathscr{C}$.
   b) Préciser le cas où (E) est un cercle.
   c) On suppose dans la suite que A distinct de F. Montrer que K est un sommet de l'axe non focal si et seulement si $K = F*I$.
   d) Etudier le cas où K est un sommet de l'axe focal.
   e) On note $H = S_F(K)$. Montrer que si $H \in (E)$ alors $0 < KF < \frac{r}{2}$.
2) On considère l'ellipse $(\mathscr{E})$ de foyers F et K et de grand axe r.
   a) Construire les tangentes à $(\mathscr{E})$ issues de I.
   b) Donner une condition sur KF pour que $\mathscr{C}_1$ coupe $(\mathscr{E})$ en deux points puis donner une construction de ces points.

Problème : *(10 points)*

Partie A :

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1+2x) - e^x$.
   a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions 0 et un réel α tel que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

2) Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = e^{-2x} - 1 + Log(1+2x)$.
   a) Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in I$.
   b) Vérifier que sur I, $f''(x)$ a le même signe que $g(x)$. En déduire que $f'(x) \geqslant 0$.
   c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Soit $\lambda \in I$. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)dt$.
   a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_0^{\lambda} Log(1+2t)dt$.
   b) En déduire que $\mathscr{A}(\lambda) = (1+2\lambda)Log(\sqrt{1+2\lambda}) - 2\lambda - \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{1}{2}$.

Partie B :

1) Soit $n \geqslant 2$.
   a) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{2n}}^{\frac{k+1}{2n}} f(t)dt \leqslant \frac{1}{2n} f\left(\frac{k+1}{2n}\right)$.
   b) En déduire que $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{2n}\right) \leqslant \mathscr{A}(\frac{1}{2}) - \mathscr{A}(\frac{1}{2n}) \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{2n}\right)$.

2) Pour $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2n}\right)$, $T_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{n}}$ et $U_n = \frac{1}{2n} Log\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)$
   a) Montrer que pour $n \geqslant 2$: $U_n = \frac{1}{2} + S_n - T_n$.
   b) Montrer que pour $n \geqslant 2$: $T_n = \dfrac{1 - \frac{1}{e}}{2n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}$ puis trouver la limite de T_n.

3) Montrer que pour $n \geqslant 2$: $\mathscr{A}(\frac{1}{2}) - \mathscr{A}(\frac{1}{2n}) + \frac{1}{2n} f\left(\frac{1}{2n}\right) \leqslant S_n \leqslant \mathscr{A}(\frac{1}{2}) - \mathscr{A}(\frac{1}{2n}) + \frac{1}{2n} f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   En déduire que la limite de S_n est $\text{Log}(\frac{2}{\sqrt{e}}) - \frac{1}{2e}$.

4) Déterminer la limite de la suite U.

	LYCEE PILOTE DE SOUSSE LE 6 / 3 / 2007	Devoir de Synthèse N°2 MATHEMATIQUES	CLASSE : 4 Math DUREE : 4 heures

EXERCICE 1 (5 points)

On donne dans un plan orienté deux carrés ABCD et DOCO' de sens direct.

1/ Soit S la similitude directe qui transforme B en O et D en O'.

a- Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S.

b- Quelle est l'image du carré ABCD par S ?

2/ Soit α un réel. On considère les point M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = (2-\alpha)\overrightarrow{AD}$.

On désigne par I le milieu du segment [MN].

a- Montrer que $S(M) = I$.

b- Déterminer l'ensemble des points I lorsque α décrit $\mathbb{R}$.

3/ On suppose que α est différent de 2.

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et passant par C recoupe la droite (CD) en un point E.

a- Montrer que E est l'image de I par une similitude directe S' de centre A dont on précisera le rapport et l'angle.

b- Montrer que lorsque α varie le vecteur $\overrightarrow{ME}$ reste fixe.

4/ Soit f la similitude indirecte qui transforme A en E et N en M.

a- Déterminer le rapport de f.

b- Dans le cas où E et N sont distincts, les droites (AB) et (EN) se coupent en Ω.

Déterminer l'image par f de chacune des droites (AB) et (EN).

En déduire que Ω est invariant par f.

c- Donner suivant les valeurs de α la forme réduite de f.

EXERCICE 2 (5points)

A

Soit (P) une parabole de foyer F, de directrice D, de sommet S et d'axe Δ

Soit M un point de (P) distinct de S.

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur D, par E le projeté orthogonal de M sur Δ et par T le point d'intersection de Δ et de la tangente à (P) en M.

Montrer que S est le milieu du segment [TE].

B

Soit (d) une droite du plan, A un point n'appartenant à (d) et O le projeté orthogonal A sur (d).

1 Soit S un point de (d) distinct de O.

a- Construire le foyer F et la directrice D de la parabole (P) passant par A, de sommet S et tangente à (d).

b- Montrer que lorsque S décrit la droite (d) privée de O, F varie sur une parabole (Γ) dont on précisera le foyer et la directrice.

c- Montrer que l'ensemble des points F est la parabole (Γ) privée de son sommet.

2. Soit (P) la parabole définie au 1 a-

La tangente (T_A) à (P) en A coupe D en L. Soit (T') la deuxième tangente à (P) issue de L et soit B son point de contact avec (P).

a- Montrer que les points A, B et F sont alignés.

b- Montrer que (T') et (T_A) sont perpendiculaires. Construire alors (T') et B.

PROBLEME (10 points)

$\boxed{A}$ n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a- Montrer que f_n est continue à droite en 0.

b- Etudier les variations de f_n.

2/ a- Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

b- Tracer les courbes (C_1) et (C_2).

3/ Soit A_n le point de (C_n) où la tangente est parallèle à la droite $(O, \vec{i})$.

a- Justifier que les points A_n appartiennent à la courbe (Γ) d'équation $y = (ex)^{-\frac{1}{x}}$

b- Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = (ex)^{-\frac{1}{x}}$.

c- Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\boxed{B}$ On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_1^{\frac{1}{\ln x}} f_1(t)\,dt$

1/ Montrer que le domaine de définition de F est $]1,+\infty[$

2/ a- Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b- En déduire que : $\forall x \in]1,+\infty[$; $F(x) = \int_x^e \frac{1}{t^2 \ln t}\,dt$

3/ a- Montrer que : $\forall t \in]1,+\infty[$: $\ln t < t-1$

b- En déduire que : $\forall x \in]1,e[$; $F(x) \geq \int_x^e \frac{1}{e^2(t-1)}\,dt$.

c- Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

4/ a- Montrer que : $\forall x \in]e,+\infty[$: $F(x) \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$

b- En déduire que F admet en $(+\infty)$ une limite finie L et que $-e^{-1} \leq L < 0$.

5/ Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative.(on donne $L \simeq -0.15$)

$\boxed{C}$ n est un entier naturel non nul et α est un réel de l'intervalle $]0,1]$.

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(t)\,dt$

1/ Montrer que I_n existe et que la suite de terme général I_n est croissante.

2/ Montrer que : $I_n = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha)$

3/ a- Montrer que $I_1 = -L$

b- Calculer I_2

4/ a- A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_{n+2}(\alpha)$ en fonction de $I_{n+1}(\alpha)$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+2} = n\,I_{n+1} + \frac{1}{e}$

b- Calculer I_3 et I_4

c- Montrer par récurrence que : pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n^k} = +\infty$

b) Etudier l'intersection de $\mathcal{H}$ et E. Montrer que les tangentes à $\mathcal{H}$ et à E en un point commun sont perpendiculaires

Problème (10pts)

I) 1°) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - e^{x-1}$

a) Etudier les variations de g et construire sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: unité 3cm

b) Soit $\lambda \in]-\infty, 1[$. On désigne par $\mathcal{D}_\lambda$ le domaine limité par $\mathcal{C}$, $y = x$, $x = \lambda$ et $x = 1$. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de $\mathcal{D}_\lambda$ déterminer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) \leq 0$. Déduire que $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ et que : $1 - xe^{-x} > 0$

2°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère O.N $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

b) Ecrire une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse nul

c) Tracer T et Γ (on étudiera la position relative de T et Γ)

3°) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$

) Soit I l'intégrale : $\int_0^1 f(x)\,dx$

1°) pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx$

a) Montrer que $J_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

b) Determiner les reels a, b et c tels que la fonction H définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = x^2 e^{-2x}$. Déduire que $J_2 = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{5}{e^2}\right)$

2°) Soit $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \dfrac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$

b) Déduire que $I - U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x)\,dx$

c) Montrer que $\forall x \geq 0$: $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \dfrac{1}{e^n}$

Déduire que $\forall x \geq 0$: $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \dfrac{1}{e^n(e-1)}$

d) Etudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$

e) Montrer que $U_2 \leq I \leq U_2 + \dfrac{1}{e^2(e-1)}$

Lycée Lilote
Gafsa

Devoir de Synthèse n°3
Mathématiques
Durée : 4 heures

4ème Maths

Exercice n°1 (5pts)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher dont trois sont blanches et cinq sont noires

1°) On extrait de l'urne, une par une quatre boules que l'on place dans l'ordre où elles sont tirées dans 4 cases numérotées de 1 à 4

a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants

A « les quatre cases sont occupées par des boules noires »

B « exactement trois cases sont occupées par des boules blanches »

b) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeur le plus petit des numéros de case occupées par une boule noire

Vérifier que $p(\{X=2\}) = \frac{15}{56}$, puis donner la loi de probabilité de X

Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ puis définir la fonction de répartition de X.

2°) On extrait au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne

Soit Y l'aléa numérique égale au nombre de boules blanches tirées

a) Justifier que Y suit une loi Binomiale. Préciser ses paramètres

b) Etablir la loi de probabilité de Y

Exercice n°2 (5pts)

On donne un losange ACBD de centre O tel que $OA = 2d$ et $OC = \frac{2d}{\sqrt{3}}$, $d > 0$

1°) Soit Δ une droite parallèle à (AC) et qui ne coupe pas [OA]

a) Montrer que Δ est la directrice d'une parabole P passant par A et O

b) Soit $\{I\} = \Delta \cap (AB)$. On désigne par O' et A' les projetés orthogonaux respectifs de ~~A~~ O et A sur Δ

Montrer que $\sin(\widehat{AIA'}) = \frac{1}{2}$

c) Exprimer AA' en fonction de IA ; puis OO' en fonction de IO

d) En déduire que si F est le foyer d'une parabole P de directrice Δ et passant par O et A alors F varie sur une hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers O et A

préciser les sommets et les asymptotes de $\mathcal{H}$

2°) On suppose dans cette question que Δ reste parallèle à (AB). Soient M et N deux points de Δ tels que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $MA + NB = AB$

a) Montrer que M varie sur une ellipse E de foyers A et O, dont on précisera le grand axe

III) Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $\Psi(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$

1°) Montrer que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\Psi'(x)$

2°) Montrer que $\forall x \geq 0$: $\frac{x^2}{2} \leq \Psi(x) \leq \frac{e x^2}{2(e-1)}$

3°) Dresser le tableau de variation de Ψ puis donner l'allure de sa courbe Γ'

IV) On définit sur $\mathbb{R}_+$ les fonction k et K par.

$$\begin{cases} k(x) = f(\operatorname{Log} x) & si\ x>0 \\ k(0) = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} K(x) = \int_1^x k(t)\,dt & si\ x>0 \\ K(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Montrer K est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $K'(x)$ pour $x>0$

2°) a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{Log} t - t + 1 \leq 0$

b) Déduire que $\forall t \in]0,1]$: $\frac{t}{t-\operatorname{Log} t} \leq t$

c) Montrer que : $\forall x \in]0,1]$ on a :

$$\frac{x^2-1}{2} \leq K(x) \leq 0$$

3°) Montrer que $\forall t \in [1,+\infty[$: $1+\frac{\operatorname{Log} t}{t} \leq \frac{t}{t-\operatorname{Log} t} \leq 1+\operatorname{Log} t$

Encadrer alors $K(x)$ pour $x \geq 1$ puis calculer $\lim_{x\to+\infty} K(x)$

Lycée pilote El Kef | Devoir de synthèse n°3 Mathématiques | 4ème M Mai 2006 Durée : 4h

Exercice 1 : (5 points)

Une urne contient trois jetons blancs numérotés 1, 1, 1 et quatre jetons noirs numérotés -1, -1, -1, 1.

1° On dispose d'une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'avoir " Face " soit égale à $\frac{1}{3}$.

On considère l'épreuve (E) suivante : On lance la pièce de monnaie une fois.

Si on obtient " pile " on tire simultanement deux jetons de l'urne

si on obtient " Face " on tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne

a- Soit A l'èvenement : « la somme des nombres inscrits sur les jetons tirés est ègal

Montrer que $p(A) = \frac{4}{7}$

b- Soit X l'alea numérique qui à chaque épreuve (E) associe la somme des nombres inscrits sur les jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$

2° L'épreuve (E) est répètée cinq fois de suite, en remettant à chaque fois les jetons tirés dans l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements s

B : « l'évènement A se réalise exactement deux fois »

C : « l'évènement A se réalise pour la première fois à la troisième épreuve »

3° Dans cette quéstion on tire succéssivement deux jetons de la manière suivante : si le jeton tiré est blanc, il sera remis dans l'urne, si non on le garde

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

F : « obtenir deux jetons de même couleur »

G : « obtenir deux jetons portant le numéro 1 »

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on donne un triangle OAH rectangle isocèle en O tel que $(\vec{OH}, \vec{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le cercle de centre A et de rayon AH coupe la droite (OA) en I et F tel que $O \in [AF]$. On désigne par (E) l'ellipse dont l'un des foyers est F, admettant A comme l'un des sommets du grand axe et tangente à (HI

1° a- Montrer que la médiatrice du segment [AH] passe par le centre de l'ellipse (E

b- En déduire que O est le centre de (E). Dans la suite on pose $OA = a$

c- Construire le second foyer F' de l'ellipse (E).

2° La perpendiculaire Δ à (FF') en F' coupe (FH) en G et (IH) en M. on pose $M' = S_{F'}$(

a- Montrer que le point G appartient au cercle de centre F' et de rayon $2a$.

b- En déduire que M est le point de contact de l'ellipse (E) et la droite (IH)

c- Prouver que $M' \in (E)$. préciser la tangente à (E) en M'.

3° Soit (E') l'ellipse de foyers F et H et de grand axe FA. on pose $J = A * H$.

On désigne par B et B' les sommets du petit axe de l'ellipse (E')

a- Montrer que les points B, B' et A sont alignés.

b- Montrer que $O \in (E')$. Déterminer la tangente à l'ellipse (E') en O.

problème : (10 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ si $x>0$ et $f(0)=0$

et Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

I- 1° a- Vérifier que f est continue à droite en 0.

b- Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=0$.

2° a- Etudier les variations de f

b- Tracer $\mathscr{C}$

3° Soit g la réstriction de f à l'intervalle $[0,\frac{1}{2}]$

a- Montrer que g est une bijection de $[0,\frac{1}{2}]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b- Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction g^{-1}

4° Soit I l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}'$ et les droites d'equations $x=0$ et $y=\frac{1}{2}$

a- prouver que la fonction $x\longmapsto x^2 f(x)$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

b- En déduire que $I=\dfrac{1}{e^2}$

5° pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{2n}\right)$

soit $n\in\mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $0\leqslant p\leqslant n-1$.

a- Montrer que pour tout $x\in\left[\frac{p}{2n},\frac{p+1}{2n}\right]$ on a : $f\left(\frac{p}{2n}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{p+1}{2n}\right)$

En déduire que : $\dfrac{1}{2n}f\left(\frac{p}{2n}\right)\leqslant\displaystyle\int_{\frac{p}{2n}}^{\frac{p+1}{2n}} f(x)\,dx\leqslant\dfrac{1}{2n}f\left(\frac{p+1}{2n}\right)$

b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $S_n\leqslant\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx\leqslant S_n+\dfrac{2}{ne^2}$

En déduire que : $\left|S_n-\dfrac{1}{e^2}\right|\leqslant\dfrac{2}{ne^2}$

c- Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$

II- pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in]0,1]$, on pose $F_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_x^1\dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{n+2}}\,dt$

1° Calculer $F_0(x)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to0^+} F_0(x)$

2° a- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$F_{n+1}(x)=\frac{1}{e(n+1)!}-\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{(n+1)!\,x^{n+1}}+F_n(x)$$

b- Montrer par recurrence sur n que $F_n(x)$ admet une limite finie notée L_n lorsque x tend vers 0^+ et que $L_{n+1}=L_n+\dfrac{1}{e(n+1)!}$

c- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $L_n=\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dots+\dfrac{1}{n!}\right)$

3° Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0=\int_0^1 e^{-t}\,dt \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ U_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$$

a- Calculer U_0 et montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1}=\dfrac{-1}{e(n+1)!}+U_n$

b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_n+L_n=1$

c- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\leqslant U_n\leqslant\dfrac{1}{(n+1)!}$

d- Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n$ et en déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$$

Lycées secondaires du KEF	Devoir de Synthèse N°3	4e Maths Durée 4h	Mai 2005

Exercice N°1 : 5 points

Un sac contient 6 boules blanches et 4 boules noires.

1°) On tire au hasard et successivement deux boules du sac, en remettant la boule tirée dans le sac si elle est noire et en ne la remettant pas si elle est blanche. Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$

2°) On répète l'épreuve précédente n fois de suite, $n \geq 2$. (en remettant toutes les boules tirées dans le sac après chaque épreuve)

a) Calculer en fonction de n la probabilité P_n d'obtenir au moins une fois " deux boules blanches "

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P_n \geq 0,999$

3°) On répartit toutes les boules du sac dans deux boites B_1 et B_2. B_1 contient 3 blanches et une noire et B_2 contient 3 blanches et 3 noires. On choisit au hasard l'une des 2 boites puis on tire simultanément 3 boules de cette boite.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur.

b) Sachant que les 3 boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de B_1 ?

Exercice N°2 : 5 points.

Soit FAB un triangle tel que $FA > FB$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre F et passant par A.

Soit N un point variable sur $\mathscr{C} \setminus \{A\}$, la médiatrice Δ de $[BN]$ coupe la droite (FN) en un point M. La droite (AB) recoupe $\mathscr{C}$ en G.

1°) a) Montrer que $MF + MB = FA$

b) En déduire que M varie sur une ellipse (E) dont on déterminera les foyers et le grand axe $2a$.

c) Préciser la tangente à (E) en M.

2°) Le cercle $\mathscr{C}'$ de centre A et de rayon AB coupe $\mathscr{C}$ en G_1 et G_2.

On note T_1 la médiatrice de $[BG_1]$ et T_2 la médiatrice de $[BG_2]$.

a) Montrer que T_1 et T_2 sont deux tangentes issues de A à l'ellipse (E).

b) T_1 recoupe $\mathscr{C}$ en A_1. Montrer que le triangle A_1GG_1 est isocèle en A_1, en déduire que $A_1G = A_1B$.

c) La perpendiculaire à la droite (BG) passant par A_1 coupe (GF) en K et recoupe $\mathscr{C}$ en A_2. Montrer que la droite (A_1A_2) est tangente à (E) en K.

Problème : 10 points

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par $f(x)=\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2cm$.

A) 1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°) a) Ecrire une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

c) Tracer Δ et $\mathscr{C}$.

3°) a) Montrer que f est une bijection de $]-\infty,1[$ sur un intervall J que l'on précisera.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$ puis tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c) Calculer en cm^2 l'aire de la région du plan limitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=1$ et $y=1$.

B) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$U_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\dots+\frac{1}{n.2^n} \quad \text{et} \quad R_n=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\,dx$$

1°) a) Montrer que pour tout $x\in[0,\frac{1}{2}]$ on a : $x^n\leq\frac{x^n}{1-x}\leq 2x^n$

b) En déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{(n+1).2^{n+1}}\leq R_n\leq\frac{1}{(n+1)2^n} \quad \text{puis calculer } \lim_{n\to+\infty}R_n$$

2°) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a ;

$$f'(x)=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$$

b) En déduire que (U_n) converge vers $\log 2$.

C) Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ on pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I_n=\int_0^{1-\frac{1}{n}}f(t)\,dt$

1°) a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$I_n=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}$$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

2°) a) Montrer que pour tout $k\in\{0,1,\dots,n-2\}$ on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\,dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

b) En déduire que : $S_n+\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}\leq I_n\leq S_n$.

c) Montrer alors que $I_n\leq S_n\leq I_n-\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}$

3°) a) Montrer que $S_n=\operatorname{Log}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

Lycée Pilote Sfax	Devoir de synthèse n°3 Mathématiques Durée 4 heures	Classes : $4M_{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$.
Le 12/05/2006		Pr :M^r Nouri et M^r Zribi.

Exercice1(6pts)

On considère deux urnes $\begin{cases} U_1 \text{ contient : une boule blanche et quatre boules noires} \\ U_2 \text{ contient : trois boules blanches et deux boules noires} \end{cases}$

1) On considère l'épreuve suivante :

On choisit une urne au hasard dans laquelle on tire simultanément trois boules.

a) Calculer la probabilité de l'évènement A :«Obtenir trois boules de la même couleur »

b) On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \geq 2$) en remettant les boules dans leurs propre urnes après chaque épreuve .

Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois trois boules de la même couleur.

c) déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,998$

Pour la suite de l'exercice on considère le jeu suivant :

On tire simultanément deux boules de U_1 qu'on les place dans U_2 puis on tire simultanément deux boules de U_2 qu'on les place dans U_1.

2) a) Soit l'évènement B :« La répartition des couleurs reste inchangée dans les deux boites »

Montrer que $p(B) = \frac{2}{5}$

b) Calculer la probabilité de l'évènement C:« Tirer la boule blanche de U_1 sachant que B est réalisé »

c) Soit X la variable aléatoire défini par « Le nombre de boules blanches qui restent dans U_1 à la fin du jeu ».

Déterminer la loi de probabilité de X .Calculer E(X) et V(X).

3) On effectue n jeux successifs ($n \geq 2$), en remettant les boules dans leurs propre urnes après chaque épreuve .

a) Déterminer la probabilité p_k d'avoir réaliser l'évènement B pour la première fois au k^{ieme} épreuve avec $1 \leq k \leq n$.

b) Calculer en fonction de n $S_n = \sum_{k=2}^{n} p_k$ puis $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice2 (4 pts)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AC = 4a$ et $BC = 3a$ avec $a > 0$

1) P désigne une parabole variable passant par A et B et de directrice D parallèle à la droite (BC).

a) Montrer que le foyer F de P varie sur l'hyperbole $(\mathcal{H})$ de foyers A et B et de distance entre les sommets 4a.

b) Construire le centre O, les sommets S et S' de $(\mathcal{H})$ ainsi que ses asymptotes Δ et Δ'.

c) Déterminer la directrice D_1 de la parabole P_1 pour laquelle F = S.

2) On note G le symétrique de B par rapport à C. Soit $(\mathcal{H}')$ une hyperbole variable passant par B et G et dont un foyer est A.

a) Montrer que l'autre foyer F' de $(\mathcal{H}')$ varie sur $(AC) \cup (E)$ où (E) est une ellipse fixe dont-on précisera les foyers et le grand axe.

b) Soit $(\mathcal{H}_1')$ l'hyperbole de la famille $(\mathcal{H}')$ pour laquelle F' = C.

Construire les tangentes ou les asymptotes communes de $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}_1')$

Problème(10 pts)

Partie A

Soit la fonction f définie sur $I = \left]-1, +\infty\right[$ par $f(x) = e^{-x} - 1 + Log(1+x)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, pour tout $x \in I$.

b) Vérifier que $f''(x)$ a le même signe que $\varphi(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{2}}$ pour tout $x \in I$.

2) a) Dresser le tableau de variation de φ.

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans I exactement deux solutions 0 et α avec $2.5 < \alpha < 2.6$

c) Donner le signe de $f''(x)$; en déduire que : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f. Tracer (C)

b) Soit F la fonction définie sur I par : $F(x) = (1+x)Log(1+x) - e^{-x} + 1 - 2x$.
Vérifier que F est une primitive de f sur I.

c) Calculer l'aire A de la partie limitée par (C) et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ et $y = 0$

Partie B

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{1-u_n}$.

On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < w_n < 1 < v_n$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Log(\frac{u_{n+2}}{u_n}) = -f(u_n - 1)$.

c) En déduire que (v_n) est décroissante et que (w_n) est croissante.

2) Montrer que (v_n) et (w_n) sont convergentes vers une même limite l que l'on précisera.

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$; $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{n}}$ et $R_n = \frac{1}{n} Log(\frac{(2n)!}{n!}) - Log\, n$

1) a) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ R_n = 1 + S_n - T_n$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \dfrac{1 - \frac{1}{e}}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $\forall\ k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, $\frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leq F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n})$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) + F(1) - F(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq F(1) - F(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f(1)$

c) Montrer que la suite (R_n) est convergente vers $L = Log(\frac{4}{e})$

Exercice N°01 : (5pts)

Une urne contient 7 jetons indiscernables au toucher
4 jetons blancs : numérotés : 1, 1, 2, 2
3 jetons noirs numérotés : 1, 1, 1

1°/ Une épreuve consiste à tirer simultanément deux jetons de l'urne
a) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : les deux jetons tirés portent le même numéro
B : les deux jetons tirés portent le même couleur.
b) Calculer $p(A/B)$ et $p(B/A)$; A et B sont ils indépendants.

2°/ Une épreuve consiste à répéter l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les jetons tirés dans l'urne
Soit X la variable aléatoire qui fait correspondre le nombre de fois où "les deux jetons tirés soient de même couleur ou de même numéros".
a) Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$. (où A et B sont les évènements données au 1ère question).
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Calculer la probabilité de l'évènement :
C : l'évènement "$A \cup B$" est réalisé pour la 1ère fois au 3ième fois".

3°/ On remet tous les jetons tirés dans l'urne, puis on tire successivement 3 jetons de la manière suivante : si le jeton tiré porte le numéro ②, on le remet dans l'urne, sinon on le remet pas.
Calculer la probabilité de l'évènement D.
D : "avoir exactement un seul jeton qui porte le numéro ① après ces 3 tirages".

Exercice N°02 : (5pts)

Soit ABCD un carré de centre O, on désigne par Δ la parallèle à (BD) passant par A et par J le point d'intersection de (DC) et Δ.
1) Soit I un point de (BD), le cercle de centre I et passant par A recoupe (AD) en M et (AB) en N.
a - Montrer que : $I = M * N$
b - Montrer que l... ...déplace sur (BD), la droite (MN) reste tangente ... ... tangente au sommet ...

Voir

dont on précisera le foyer et la directrice

2) Soient (P_1) et (P_2) les paraboles de directrice Δ et de foyers respectifs D et C.

a – Construire les tangentes T_1 et T_2 à la parabole (P_1) issues de J ainsi que leurs points de contact. puis montrer que T_1 et T_2 sont perpendiculaires

b – Montrer que : $h_{(J,2)}\langle P_1 \rangle = P_2$., et en déduire que : T_1 et T_2 sont tangentes à (P_2) et préciser leurs points de contact avec (P_2)

3°/ a – Montrer que les points communs à (P_1) et (P_2) sont les points d'intersection de (P_2) et de la médiatrice de $[DC]$

b – Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au carrée ABCD, K le point d'intersection de Δ et de la médiatrice de $[DC]$ et H le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et (KC) autre que C. Construire O' l'image de O par l'homothétie de centre K et qui envoie H sur C.

c – Montrer que : $P_1 \cap P_2 = \{O, O'\}$.

Problème : (10pts) :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par : $f(x) = e^{-x}\log(1+e^{2x})$, $(\mathcal{C})$ étant la représentation graphique de f dans un r.o.n $(O,\vec{i},\vec{j})$

on prendra : $\|\vec{i}\| = 2\,cm$ (comme unité graphique).

1°/ Soit φ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi(t) = \dfrac{2t}{1+t} - \log(1+t)$

– Dresser le tableau des variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in [0,1]$.

2°/ a – Montrer que : pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a : $f'(x) = e^{-x}\varphi(e^{2x})$ et Dresser le tableau des variations de f

b – Tracer $(\mathcal{C})$

3°/ Soit ϕ définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $\phi(x) = tg\, x$

a – Montrer que ϕ réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$

b – calculer : $\phi^{-1}(0)$; $\phi^{-1}(1)$ et $\phi^{-1}(\sqrt{3})$

c – Montrer que ϕ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; (x \in \mathbb{R})$$

d – En déduire que $\phi^{-1}(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$; $(x \in \mathbb{R})$

4°/ Soit u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = \int_0^{-\log x} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt$

a) Montrer que $u'(x) = -(\phi^{-1})'(x)$. (pour $x>0$).

b) Calculer alors $u(x)$ en fonction de $\phi^{-1}(x)$ pour $x>0$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a : $f'(x) = -f(x) + \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$

d) Soit A l'aire de la région du plan limitée par : $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation : $x = -\log\sqrt{3}$; $x=0$ et $y=0$. Calculer A.

II) Soit $\vartheta(t) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}$; $t \in [0, \pi/2]$ et on note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_0^{\pi/2} \vartheta(t)\, dt$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^{\pi/2} \vartheta(t) \sin^n(t)\, dt$

1°/ Soit $F(x) = \phi^{-1}(\sin x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

a- Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer $F'(x)$

b- Vérifier que $I_0 = \frac{\pi}{4}$, puis calculer I_1

c- Montrer que (I_n) est décroissante.

2°/ a- Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$; $(n \in \mathbb{N})$.

b- Etablir alors que : $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$

c- En déduire que la suite $(n I_n)$ est convergente et calculer sa limite.

Lycée Pilote Nabeul	DEVOIR DE SYNTHESE N°3	2004-2005
Mr Aissa Melle Gastli	DUREE 4 H	4ème M

EXERCICE N°1 : (4 points)

Un livreur de Pizzas Hut doit servir un client qui se trouve à 6 km et qui exige d'être servi à 20 heures précises , pour se déplacer il utilise une vespa qui roule constamment à une vitesse moyenne de 36 *km/h*
Sur son trajet , il va rencontrer deux feux tricolores non synchronisés et indépendants. S'il arrive à un feu orange il s'arrête 60 secondes et repart et s'il arrive à un feu rouge il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu , la probabilité pour qu'il soit vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$ et celle qui soit orange est $\frac{1}{4}$

1/ Soit X l'aléa numérique égal au temps mis par le livreur en minutes pour arriver à destination.

a) Montrer que $P(X = 10) = \frac{1}{4}$ et $P(X = 11) = \frac{5}{16}$

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Déterminer puis représenter la fonction de répartition de X

2/ a) Le livreur part à 19 heures 49 minutes , montrer que la probabilité pour qu'il arrive en retard est $\frac{3}{16}$

b) Le livreur sert son client 4 jours de suite du Lundi au Jeudi , calculer les probabilités suivantes

p_1 : la probabilité pour qu'il soit en retard le Lundi

p_2 : la probabilité pour qu'il soit en retard pour la deuxième fois le Mercredi

p_3 : la probabilité pour qu'il soit en retard 2 fois pendant ces 4 jours

EXERCICE N°2 : (6 points)

Soit ABF un triangle comme l'indique la figure , on désigne par ζ le cercle circonscrit à ce triangle et O son centre , les tangentes en A et en B à ζ se coupent au point I .

Soient P_1 et P_2 les paraboles de foyer F et de directrices respectives (IA) et (IB)

1/ Montrer que O est point commun à P_1 et P_2

2/ La tangente en O à P_1 coupe (IA) en T_1 et la tangente en O à P_2 coupe (IB)en T_2 .
montrer que T_1 , T_2 et F sont alignées

3/ On se propose de déterminer et construire le deuxième point d'intersection de P_1 et P_2 autre que O.
La droite (IF) recoupe le cercle ζ en G , soit h l'homothétie de centre I qui transforme G en F et on désigne Par ζ' l'image de ζ par h

a) Prouver que le centre du cercle ζ' est le deuxième point commun à P_1 et P_2

b) Construire alors ce point

4/ Soit Δ la médiatrice du segment $[IF]$

a) Montrer que la droite Δ est une tangente commune à P_1 à P_2

b) Construire les points de contact sur Δ de chacune des deux paraboles

5/ La droite Δ coupe (OF) en un point M , montrer que lorsque F varie sur ζ ce point varie sur une hyperbole qu'on précisera

PROBLEME : (10 points)

A – Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-(Logx)^2}}$

1/ Montrer que f est définie sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$

2/ Etudier les variations de f

3/ On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2cm$

Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse e

4/ Tracer C et T

B – On désigne par g et F les fonctions définies sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$ par : $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ et $F(x)=\int_1^x g(t)dt$

1/ Montrer F est dérivable sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$ et étudier le sens de variation de F

2/ Soit h la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=\sin x$

a) Montrer que h admet une réciproque h^{-1} définie sur $[-1,1]$

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$ $(h^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3/ On considère la fonction H définie sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$ par $H(x)=\int_0^{\frac{Logx}{\sqrt{2}}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$ et calculer H'(x)

b) En déduire que pour tout $x\in\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$ H (x) = F (x)

c) Prouver alors que : $\int_1^e g(t)dt=\dfrac{\pi}{4}$

4/ On définit la fonction G sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x)=e^{\sqrt{2}\sin x}$

a) Etudier les variations de G sur et tracer sa courbe représentative Γ dans un repère orthonormé $(\omega,\vec{u},\vec{v})$

b) Montrer que G est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]e^{-\sqrt{2}},e^{\sqrt{2}}\right[$, prouver que $G^{-1}=F$, tracer alors la courbe représentative de F

C – Soit n un entier naturel non nul et la suite arithmétique (x_i) de raison $\dfrac{e-1}{n}$ et de premier terme $x_0=1$

1/ a) Montrer que pour tout $x\in[1,e]$ $|g'(x)|\le 2$

b) En déduire que : $\forall x\in[x_i,x_{i+1}]$ pour $i\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$: $|g(x)-g(x_i)|\le 2|x-x_i|\le\dfrac{2(e-1)}{n}$

2/ Montrer alors que : $\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(g(x)-g(x_i))dx\right|\le\dfrac{2(e-1)^2}{n^2}$ et vérifier que $\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)dx=\int_1^e g(x)dx$

3/ On pose pour n entier naturel non nul $S_n=\dfrac{e-1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)$, montrer que $\left|S_n-\dfrac{\pi}{4}\right|\le\dfrac{2(e-1)^2}{n}$

4/ En déduire que la suite (S_n) est convergente et préciser sa limite

Lycée Pilote
Gafsa

Devoir de synthèse N° 3
4ième maths

EXERCICE 1 : (5 pts)

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche indiscernables au toucher.
On considère l'épreuve suivante :
On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.
Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.
On appelle :
E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées »
B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées »

1- a- Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
b- Calculer la probabilité de réalisation de chacun des évènements suivants :
$(E_0 \cap B)$, $(E_0 \cap \overline{B})$, puis (E_0).
b- On tire trois boules de l'urne, sachant qu'aucune boule blanche ne figure dans ce tirage, quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire?

2- On effectue successivement cinq fois l'épreuve décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a eu une et une seule boule blanche parmi les trois boules tirées.
a- Donner la loi de probabilité de X
b- Calculer son espérance mathématique ainsi que sa variance et son écart type
c- Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche?

EXERCICE 2 : (5 pts)

Soit OABC un carré et F un point du segment [OA] privé de O

1- On désigne par P la parabole de foyer F et de sommet O
a- Construire la directrice D de P
b- On désigne par H le projeté orthogonal de C sur D et Δ la médiatrice de [FH]
Montrer que Δ est une tangente à P et construire leur point de contact O'

2- Soit N le milieu du segment [FO']
a- Montrer que N appartient à la parabole de foyer F et de directrice (OC)
b- En considérant le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, retrouver le résultat précédent.

3- Soit Γ l'hyperbole de foyers O et O' et de distance au sommets $2a = O'C$. On pose Ω le centre de Γ et I le milieu de [OC]
a- Montrer que $FO' - FO = 2a$
b- En déduire que F appartient à Γ
c- Montrer que I appartient au cercle principal de Γ
Déduire que la droite (ΩI) est asymptote à Γ et que (FH) est la tangente à Γ en F
d- Montrer que la deuxième asymptote est tangente au cercle fixe de centre O et de rayon OI

PROBLEME : (10 pts)

-Partie A-

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- a- Montrer que la fonction f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{f(x)}{1+e^{2x}}$

b- Etudier les variations de f

c- Montrer que la courbe Γ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. Donner une équation de la tangente T à Γ en ce point.

2- a- Etudier les variations de la fonction dérivée f' de f sur IR

b- En déduire que :pour tout réel x on a : $0 < f'(x) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

c- Soit la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = f(x) - x$

Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un seul réel α tel que : $\varphi(\alpha) = 0$ *et* $\text{Log}\,2 < \alpha < 1$

d- En déduire le signe de φ sur IR et les positions relatives de Γ et la droite $\Delta : y = x$

e- Construire Δ, T et Γ

3- a- Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera

b- Soit g la fonction réciproque de f

Montrer que pour tout réel x de J , $g(x) = \dfrac{1}{2}\text{Log}(\dfrac{x^2}{1-x^2})$

c- Tracer la courbe représentative Γ' de g dans le même repère.

On désignera par $\Re$ la région du plan limitée par les courbes Γ, Γ' et les deux axes du repère.

-Partie B-

1- On pose $I = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \text{Log}(\dfrac{x^2}{1-x^2})dx$

a- En utilisant une intégration par parties, calculer I

(On remarquera que $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{1-x^2}$)

b- En déduire en fonction de α, l'aire de la région $\Re$.

2- On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \;, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a- Montrer que pour tout n de IN $0 < U_n < \alpha$

b- Etudier la monotonie de la suite (U_n). En déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que pour tout n de IN $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}|U_n - \alpha|$

d- En déduire la limite de la suite (U_n)

3- On considère la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \dfrac{1}{\alpha - U_n}\displaystyle\int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx$

Montrer que $U_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$ *pour tout n de* $\mathbb{N}$ et en déduire la limite de la suite (V_n)

Bon travail

-Partie C-

Soit la fonction F définie sur $]-1,1[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}(\frac{x^2}{1-x^2})} f(t)dt & si\ x \neq 0 \\ F(0) = -\text{Log}(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

1- a- Justifier l'existence de F(x) sur $]-1,1[$

b- Vérifier que F est une fonction paire

c- Montrer que F est dérivable sur $]0,1[$ et calculer F'(x)

2- a- Calculer $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$ et en déduire l'expression de F(x) sur $]0,1[$

b- Etudier la continuité et la dérivabilité de F en 0

3- Tracer dans un autre repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction F

4- Calculer $F(\alpha)$ et retrouver alors l'aire de la région $\Re$.

LYCEE PILOTE GABES 2008	DEVOIR DE SYNTHESE N° : 3	• DUREE : 4h
	• SECTION : MATHEMATIQUES	• COEF : 4
	• EPREUVE : MATHEMATIQUES	PROFS : H. ABDERRAHIM H. DHIAF

EXERCICE N° : 1 (2 points)

Un supermarché dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen y (en mn) d'attente à une caisse en fonction du nombre **x** de caisses ouvertes :

nombre de caisses ouvertes x	3	4	5	6	8	10	12
temps moyen d'attente : y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule parmi les trois propositions est exacte. Indiquer ses références (Exemple . 1°) c)) sur la copie. (aucune justification n'est exigée)

1°) Les coordonnées du point moyen G sont :
a) (6,86 ; 8,6) b) (8,6 ; 6,86) c) (6 ; 8,6)

2°) La droite D d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation :
a) $y = -0,707x + 12,935$ b) $y = -1,209x + 16,889$ c) $y = -1,377x + 18,04$

3°) Le nombre de caisses (à une unité près) à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit 5 mn est :
a) 9 b) 10 c) 11

4°) On suppose que le temps moyen d'attente est donné en fonction de x par $f(x) = \frac{48}{x}$ alors le nombre de caisses (à une unité près) à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit 5 mn est :
a) 9 b) 10 c) 11

EXERCICE N° : 2 (4 points)

Dans un magasin, sont en vente des composants électroniques tous identiques en apparence, mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0,02.
(Dans la suite les parties A et B sont indépendantes et les valeurs approchées des probabilités à calculer seront données à 10^{-3} près).

Partie A

Un client achète 50 composants. On admet que l'achat de 50 composants est assimilé à 50 tirages indépendants avec remise.
On considère l'aléa numérique X égal au nombre de composants défectueux parmi le lot acheté.
1) Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ?
2) Calculer la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?
3) Quel est dans un lot de 50 composants achetés le nombre moyen de composants défectueux?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.
1) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 1000 heures
a) si ce composant est défectueux
b) si ce composant n'est pas défectueux
2) Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard. Démontrer que la p[illegible]
que ce composant soit [illegible] ures de

fonctionnement est : $p(T \geq t) = 0{,}02.e^{-5\times10^{-4}t} + 0{,}98e^{-10^{-4}t}$

3) Sachant que le composant acheté est encore en état de marche 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

EXERCICE N° : 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = xe^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A°)1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

3°) Tracer (C).

4°) Montrer que pour tout réel x de [0 , 1], on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.

B°) On pose, pour tout n de IN*, on a : $I_n = \frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx$ et $U_n = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n!2^n}$

1°) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2°) Montrer que, pour tout n de IN*, on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$.

3°) Démontrer, par récurrence, que pour tout n de IN*, on a : $U_n = \sqrt{e} - I_n$

4°)a) Montrer que, pour tout n de IN*, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n!)2^{n+1}}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

PROBLEME : (8 points)

Le plan orienté est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x' , y') tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$

1°) Soit z = x + iy l'affixe du point M et z' = x' + iy' celle du point M'.

a) Démontrer que z' = az, où a est un nombre complexe que l'on calculera.

b) En déduire que f est une similitude directe et donner sa forme réduite.

2°) Soit H l'hyperbole d'équation : $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer ses asymptotes, son excentricité e, son foyer d'abscisse positive F et la directrice D associés .

b) Soit (H') la courbe image de (H) par f.

Prouver que (H') est une hyperbole d'excentricité e, de foyer F' = f(F).

c) Tracer H sur la feuille « à remettre » ci – jointe dans le même repère que H'.

3°) Déterminer une équation de H' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

En déduire que H' est la représentation graphique de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \frac{6}{x})$.

4°) Soit δ la droite d'équation : x = 2 et δ' son image par f.

a) Tracer δ et δ' dans le même repère que H'.

b) Vérifier que δ' coupe H' aux points $A_1\left(1, \frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$ et $A_2\left(3, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

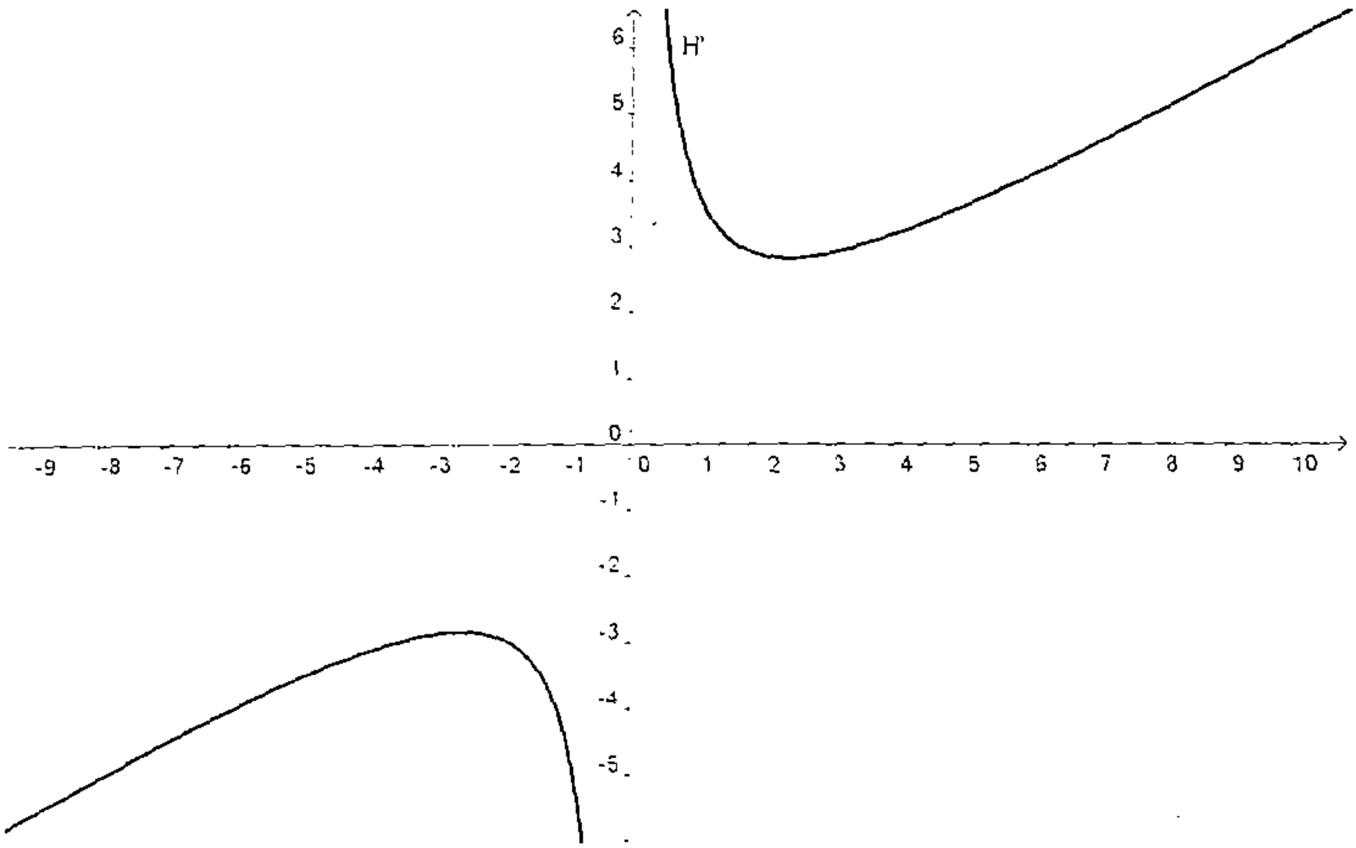
c) Calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe H' et la droite δ'.

d) Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}\,dx$ et déduire sa valeur du résultat précédent.

Feuille à remettre

Nom : Prénom : classe :

Problème



Lycée Pilote Sfax	**Devoir de synthèse n°3**	**Classes : $4M_{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$.**
Le 07/05/2005	**Mathématiques** **Durée 4 heures**	**Pr : Mr Nouri et Mr Zribi.**

Exercice1 (5 pts)

On considère deux urnes $\begin{cases} U_1 \text{ contient : deux boules blanches et trois boules noires} \\ U_2 \text{ contient : une boule blanche et trois boules noires} \end{cases}$

1) On tire de U_1 simultanément deux boules et de U_2 une boule.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer E(X).

b) On gagne x dinars pour chaque boule blanche tirée et on perd sept dinars pour chaque boule noire tirée. Déterminer x pour que le jeu soit équitable.

2) On répète l'épreuve précédente n fois de suite ($n \in \mathbb{N}^*$), en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs propres urnes.

Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où l'on obtient trois boules de même couleur.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer E(Y) et V(Y).

b) Soit p_n la probabilité d'obtenir au moins deux fois trois boules de même couleur.

Montrer que $p_n = 1-(\frac{3}{4})^{n-1}(\frac{n+3}{4})$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

3) On considère l'épreuve suivante :

On tire simultanément deux boules de U_1 qu'on les place dans U_2 puis on tire simultanément trois boules de U_2.

a) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Obtenir trois boules de même couleur à la fin de l'épreuve »

b) Sachant qu'on a obtenu trois boules de même couleur quelle est la probabilité d'avoir tirer deux boules de même couleur de U_1.

Exercice2 (5 pts)

Soit IJKL un rectangle tel que $IJ = 2a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et $IJ = 2JK$. On note $F = I * J$, $A = K * L$, $G = S_A(F)$ et (γ) le cercle de centre G et de rayon 2a.

1) Soit P la parabole de foyer F et de directrice (KL).

a) Préciser le sommet S de P et montrer que I et J sont deux points de P.

b) Déterminer les tangentes respectives à P en I et J et vérifier qu'elles sont perpendiculaires.

2) Soit (E) une ellipse variable dont F est l'un des foyers et A l'un des sommets du grand axe

a) Montrer que l'autre foyer F' de (E) décrit $[AF] \setminus \{A, F\}$.

b) En déduire l'ensemble décrit par le centre O de (E).

c) Montrer que les sommets B et B' du petit axe de (E) varient sur $P \setminus \{I, J, S\}$.

3) Soit (H) l'hyperbole dont F est l'un des foyers, tangente à (KL) et de distance entre les sommets 2a.

a) Montrer que le second foyer F'' de (H) varie sur un arc du cercle (γ) qu'on précisera.

b) Construire le foyer F'' de (H) pour lequel K est son point de contact avec (KL).

c) Construire alors le centre O'' de (H) ainsi que ses asymptotes.

Problème(10 pts)

Partie(A)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

(ζ) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $1-2t \le e^{-2t} \le 1$

b) A l'aide d'une intégration entre 0 et x, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ ,\ 2x - 2x^2 \le 1 - e^{-2x} \le 2x$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+ ,\ 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \le e^{-2x} + 2x - 1 \le 2x^2$

c) Montrer alors que f est dérivable à droite en 0 et que $f_d'(0) = -2$.

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ ,\ e^{2x} \ge 1 + 2x$ puis dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer (ζ). (On précisera la tangente à (ζ) au point d'abscisse 0)

3) On pose $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ ,\ F'(x) = f(x)e^{-2x}$.

c) Montrer que : $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \le \frac{1}{t} - f(t) \le e^{-2t}$.

En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \le \text{Log}2 - F(x) \le \frac{1}{2}(e^{-2x} - e^{-4x})$

d) Dresser alors le tableau de variation de F.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = f(n) + f(n+1) + ... + f(2n)$

a) Vérifier que : $\forall k \in \{0,1,2,...,n-1\},\ f(k+1+n) \le \int_{k+n}^{k+1+n} f(x)\,dx \le f(k+n)$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(n) + f(2n) \le S_n \le F(n) + f(n)$

c) Montrer alors que S_n est convergente et calculer sa limite.

Partie(B)

Dans cette partie $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(1 - e^{-2x})^n}{x} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f_n est continu à droite en 0.

b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et calculer $(f_n')_d(0)$. (On distinguera les cas $n = 2$ et $n \ge 3$)

c) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f_n'(x) = \dfrac{e^{-2x}(1 - e^{-2x})^{n-1}}{x^2}(1 + 2nx - e^{2x})$

2) On pose $g_n(x) = 1 + 2nx - e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

a) Dresser le tableau de variation de g_n

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution α_n

c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[,\ \frac{1}{x} + 2\text{Log}x - x < 0$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \frac{1}{2}\text{Log}n < \alpha_n < \text{Log}n$

d) Donner le signe de $g_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variation de f_n

3) On pose $u_n = (\frac{1}{2}\text{Log}n) f_n(\frac{1}{2}\text{Log}n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$

b) En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite.

Lycée pilote De Gabès	DEVOIR de synthèse $3^{ème}$ trimestre	Prof : Hédi Abderrahim
Classe : $4^{ème}$ **Math**	Date : 07 / 05/ 05	Durée : 4H Nombre de pages : 3

Exercice 1

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
Dans U_1, il ya deux boules rouges et huit boules blanches et dans U_2 , il ya une boule rouge et deux boules blanches.

1°) Une épreuve consiste à tirer une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis on tire une boule de U_2. On considère les événements suivants:

R_1 : " La boule tirée de U_1 est rouge".

R_2 : " La boule tirée de U_2 est rouge".

A: " à la fin de l'épreuve, U_2 ne contient plus de boules rouges."

a) Calculer P(R_1) et P(R_2).

b) Montrer que P(A) est $\frac{1}{5}$.

2°) On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant chaque fois les boules dans leurs urnes d'origine. Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où A est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'éspèrence mathématique et la variance de X .

3°) Une nouvelle épreuve consiste à tirer une boule de U_1:
- Si elle est rouge, on la gardera et on tire une seconde boule de U_2.
- Si elle est blanche, on la mettra dans U_2 et on tirera simultanément deux boules de U_2.

Soit Y l'aléa numérique égal au nombre de boules rouges obtenues à l'issue de l'épreuve.
Calculer P(Y=0) et P(Y=2). En déduire P(Y=1).

Exercice 2

Soient F et H deux points distincts, Δ la médiatrice de [FH] et J le milieu de [FH]. Soit M un point de Δ et D la droite passant par H et perpendiculaire à la droite (MH). On désigne par (P) la parabole de foyer F et de directrice D.

1°) a) Montrer que Δ est la tangente à (P) au point M.

b) Vérifier que les droites D et Δ sont parallèles si et seulement si M = J.

2°) Dans le cas où M est différent de J, la droite D coupe Δ en I. Soit E le symétrique de H par rapport à I et Δ' la perpendiculaire à Δ en I.

a) Montrer que Δ' est tangente à la parabole (P).

b) Construire le point de contact N de la parabole (P) et de la droite Δ' et montrer que les points M, F et N sont alignés.

3°) a) Soit S le sommet de la parabole (P). Montrer que le point J appartient à la tangente au sommet à la parabole (P) et déduire que S appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [FJ].

b) Soit R un point de $(\mathscr{C})$ distinct de F. Montrer que la parabole de foyer F et de sommet R est tangente à Δ en un point que l'on déterminera. (Il est conseil
faire une figure sépar

c) Déterminer alors l'ensemble des points S quand le point M varie sur Δ.

Problème

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = (x + \frac{3}{2})e^{-x} - \frac{1}{2} & si \; x \le 0 \\ f(x) = \frac{Log(1+x)}{x} & si \; x > 0 \end{cases}$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1°) a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$.

b) Montrer que : $\begin{cases} f'(x) = -e^{-x}(x + \frac{1}{2}) & si \quad x \le 0 \\ f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x+1} - Log(1+x)}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$

2°) a) Montrer que pour tout $t \ge 0$ on a : $1 - t \le \frac{1}{1+t} \le 1 - t + t^2$.

b) Déduire que pour tout x > 0, on a : $1 - \frac{1}{2}x \le f(x) \le 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2$.

c) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que f'(0) = - $\frac{1}{2}$.

3°) a) Etudier le signe de la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} - Log(1+x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 puis étudier la position relative de

T et (C) ... (On admettra que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour (C)).

d) Construire T et (C).

4°) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 possède dans $]-\infty, 0[$ une solution unique qu'on notera α.

b) Montrer que : $e^{-\alpha} = \frac{1}{2\alpha + 3}$.

c) Montrer que l'aire de la partie du plan limitée par (C) et les axes des coordonnées est $\alpha \; 5 \cdot \frac{2\alpha - 5}{2\alpha + 3}$.

Partie B.

Pour tout réel x, on pose F(x) = $\int_{x^2}^{x^2+1} f(t)dt$.

1°) Montrer que F est dérivable sur IR et que pour tout réel x on a :

$F'(x) = 2x[f(x^2+1) - f(x^2)]$.

2°) Montrer que : $f(x^2+1) \leq F(x) \leq f(x^2)$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x)$.

3°) Dresser le tableau de variations de F.(On ne demande pas de calculer F(0)).

Partie C.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $U_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$ et $V_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

et pour tout réel x on pose : $S_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

1°) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$.

b) Déduire que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $Log(1+x) = S_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$

2°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{Log2}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

b) Déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

c) Exprimer V_n à l'aide de U_n et F(0). En déduire $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

3°) a) En considérant l'encadrement : $0 \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$, montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+1}$

b) En déduire que $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1]$ on a : $\left| f(x) - \frac{S_n(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)x}$.

c) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = Log2$

Lycée Pilote de L'Ariana	*MATHEMATIQUES*	*4ème Math*
04-03-2014	*Synthèse II*	*Durée : 4 heures*

Exercice 1 : (2 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1) Soit x un entier.

Si $\begin{cases} x \equiv 2\ (mod\ 4\ ) \\ x \equiv 2\ (\ mod\ 6) \end{cases}$ alors

a) $x \equiv 2\ (mod\ 24\ )$, b) $x \equiv 2\ (mod\ 12\ )$ c) $x \equiv 1\ (mod\ 6\ )$

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

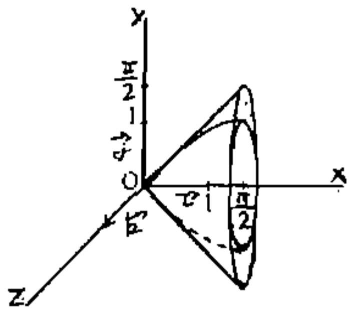
On considère les points A (31, − 50) et B (−21, 34).

Le nombre des points de coordonnées entières appartenant au segment [AB] est :

a) 5 points b) 3 points c) aucun point

3) Soient : $C = \left\{ M(x,y) \text{ tel que } y = \sin x;\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

et $C' = \left\{ M(x,y) \text{ tel que } y = x\,;\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.



On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe ($O, \vec{i}$).

Le volume, en unité de volume, de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S' est :

a) $\frac{\pi^2}{24}(\pi^2 + 6)$ b) $\frac{\pi^2}{24}(\pi^2 - \frac{1}{3})$ c) $\frac{\pi^2}{24}(\pi^2 - 6)$

Exercice 2:(6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

I/ 1) a/ Etudier les variations de f.

b/ Montrer que la courbe C de f admet une asymptote oblique d'équation : y = - x

2) a/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Tracer la courbe C de f et la courbe C' de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

3) a/ Montrer que pour tout réel t positif on a ; $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t$.

b/ En déduire que pour tout réel x on a : $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$

II/ Soit u la suite définie sur IN* par :

$u_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout n non nul, $u_{n+1} = (1 + \frac{1}{e^{n+1}})\, u_n$.

1) On pose v la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout n non nul.

a/ Montrer que pour tout n, non nul $v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

b/ Montrer que la suite v est croissante.

2) On définit les suites (S_n) et (T_n) par : $S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n}$ et $T_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$.

a/ Déterminer les limites des suites S et T.

b/ Déduire de ce qui précède que pour tout entier n non nul on a :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq v_n \leq S_n.$$

3) a/ Montrer que la suite (v_n) est convergente. On note a sa limite.

b/ Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq a \leq \frac{1}{e-1}$.

c/ Montrer que la suite u est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 3 :(4 points)

1) a/ Déterminer selon n les restes possibles de 2^n par 7.

b/ Déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0 \pmod 7$.

c/ Déterminer le reste de la division euclidienne de $2011^{1432^{2012}}$ par 7.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation d'inconnues (x, y), (E) : 2011 x – 1432 y = 1.

a/ En utilisant l'algorithme d'Euclide , donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b/ Résoudre alors (E).

c/ Résoudre alors dans Z, $1432\,x \equiv -5 \pmod{2011}$.

Exercice 4:(4 points)

Soit F la fonction définie sur IR* par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

1) Montrer que F est impaire.

2) Pour tout x > 0, on pose $g(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

a/ Vérifier que F(x) = g(2x) – g(x) ; pour tout x > 0.

b/ Montrer que g est dérivable sur IR*+ puis calculer F'(x) pour tout x > 0.

c/ En Déduire le sens de variations de F sur]0, +∞[.

3) a/ Montrer que pour tout x > 0, il existe un réel c ∈] x, 2x [tel que $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$.

b/ Déduire que, pour tout x > 0 ; $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

c/ Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} F(x)$; $\lim_{x \to 0^+} F(x)$.

4) a/ Dresser le tableau de variations de F.

b/ Tracer l'allure de la courbe C de F dans un repère orthonormé.

(On donne $F(\sqrt{2}) \cong 0.7$)

Exercice 5 :(4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

(E) : $z^2 - z(3m - i)m + 2m^2(1+m^2) = 0$, où m est un paramètre réel.

I/ Résoudre l'équation (E).

II/ Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $M(m(m+i))$ et $N(2m(m-i))$.

1) a/ Montrer que M varie sur une parabole P quand m varie sur IR.

b/ Caractériser la parabole P.

c/ Montrer que par le point $I(-1, 0)$ passe deux tangentes T_1 et T_2 à la parabole P.

d/ Tracer la parabole P ainsi que les tangentes T_1 et T_2.

2) a/ Déterminer l'affixe du point G image du point N par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b/ Déduire que le point G est l'image du point M par une similitude indirecte g que l'on caractérisera.

Lycées secondaires de la ville du Kef

Devoir de synthèse n°2
Mathématiques

$4^{ème}$ M ,
Durée : 4^h
Mars 2005

xercice 1 : (6 points)

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre o et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par R la rotation de centre o et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD]

1° On pose $f = S_{(BC)} \circ R \circ S_{(AC)}$
Déterminer $f(A)$, $f(D)$ puis caractériser f.

2° On pose $g = R \circ S_{(AD)}$

a_ Déterminer $g(A)$ et $g(J)$

b_ Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

3° Soit S la similitude directe telle que $S(O) = D$ et $S(I) = C$

a_ Déterminer le rapport et l'angle de S. construire son centre Ω

b_ préciser les images, par S, des droites (AO) et (AI). En déduire S(A)

c_ Montrer que $S(J) = A$, en déduire que les points Ω, J et B sont alignés.

4° Soit S' la similitude directe de centre B qui transforme C en I

a_ Déterminer le rapport et l'angle de S'

b_ Montrer que $S' \circ S$ est une symétrie centrale que l'on caractérisera.

xercice 2 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{-4x}{4+x^4}$

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $F(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

1° pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = F(2x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$

a_ Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$

b_ En déduire que pour tout $x > 0$ on a $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$. calculer $F(2) + F(1)$

2° Soit g la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \sqrt{2\cot g x}$

a_ Dresser le tableau de variation de g.

b_ En déduire que g est une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $]0,+\infty[$

c_ Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$

d_ Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $F(x) = g^{-1}(x)$

roblème : (10 points)

I_ On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \operatorname{Log} x}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

1° On désigne par g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $g_1(t) = \operatorname{Log}(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$ et $g_2(t) = \operatorname{Log}(1+t) - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$

a_ Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions g_1 et g_2

b_ En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a : $-\frac{t^2}{2} \leq \operatorname{Log}(1+t) - t \leq \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$

c_ Déterminer $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\operatorname{Log}(1+t) - t}{t^2}$

2°_ a_ Montrer que f est continue à droite en 1

b_ En utilisant 1°, Montrer que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1) = \frac{1}{2}$

3°_ pour tout $x \in]1,+\infty[$ on pose $g(x) = 1 - x + \text{Log}\, x$

a_ Etudier les variations de g.

b_ En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$

4°_ a_ Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^2}$

b_ Dresser le tableau de variation de f.

c_ Compléter l'étude de f et construire sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II_ 1°_ a_ En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction $v : t \longrightarrow t\,\text{Log}\,t$ montrer que :
pour tout $x > 1$ on a : $1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \text{Log}\, x$

b_ En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$1 \leqslant (k+1)\text{Log}\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant 1 + \text{Log}\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

2°_ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\text{Log}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

a_ Montrer que $1 \leqslant U_n \leqslant 1 + \frac{\text{Log}(1+n)}{n}$

b_ calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

3°_ pour tout $x \in]1,+\infty[$, on pose $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ et on désigne par H une primitive de h sur $]1,+\infty[$.
pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(H(k+1) - H(k)\right)$

a_ En utilisant II_1° montrer que h est décroissante sur $]1,+\infty[$

b_ En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $H(k+1) - H(k) \geqslant \frac{\text{Log}(k+1)}{k}$

c_ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a :

$$S_n \geqslant \frac{1}{n}\text{Log}\left[\frac{(n+1)!}{2}\right]$$

d_ En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction $\varphi : x \longrightarrow x\,\text{Log}(x) - x$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a :

$$\varphi(k) - \varphi(k-1) \leqslant \text{Log}\, k$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ on a : $1 + \varphi(n) \leqslant \text{Log}(n!)$

e_ Montrer alors que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

L. P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°2**	**Prof: Chouihi**
Le : 04 - 03 - 08	**Durée : 4heures**	**Classes: $4M_{1+3}$**

Exercice N°1 (4points)

Compléter la feuille ci jointe puis la remettre.

Exercice N°2 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \text{Log}(4x + \sqrt{16x^2 + 1})$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) .

1) a. Montrer que f est définie sur IR.

   b. Vérifier que f est impaire.

2) a. Etudier les variations de f.

   b. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) .

3) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe ($\mathscr{C}'$) de sa fonction réciproque f^{-1} .

   b. Montrer que pour tout $x \in IR$, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{8}$

4) a. Montrer que l'équation : f(x) = x , admet dans R_+ , deux solutions. On désignera par α la solution non nulle.

   b. Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par les deux courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) .

Exercice N°3 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct.

1) Soit f la similitude directe qui envoie D en A et O en B.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

   b) Préciser l'image par f de la droite (OD).

   c) Déterminer les images par f des droites (OC) et (CD) et en déduire que C est le centre de f.

2) On désigne par J le symétrique de O par rapport à (AD) et par R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   On pose $g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ f \circ R$.

   a) Préciser g(J) et g(A).

   b) Montrer que g est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

3) Soit Ω le centre de g.

   a) Montrer que les points Ω, A, D et B sont cocycliques.

   b) Caractériser gog et en déduire que Ω appartient au cercle de diamètre [JD].

   c) Trouver une construction géométrique de Ω.

4) On désigne par I le symétrique de C par rapport à la droite (AD) et par K le symétrique de D par rapport à J.

Soit σ la similitude indirecte définie par : $\sigma = g \circ S_{(AI)}$.

a) Vérifier que J est le milieu du segment [AI].

b) Déterminer $\sigma\circ\sigma(I)$ et en déduire que K est le centre de σ.

c) Déterminer l'axe Δ de σ.

Exercice N°4 (5 points)

Soit la suite (V_n) définie par : $V_0 = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ et $\forall n \in IN^*$, $V_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$

1°) Calculer V_0.

2°) a/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points M(x,y) tels que : $y^2 - x(1-x) = 0$.

b/ En déduire que $V_1 = \frac{\pi}{8}$

3°) a/ Montrer que la suite V est décroissante.

b/ En déduire qu'elle est convergente.

4°) a/ Prouver à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in IN$, $V_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}V_n$

b/ En déduire que : $\forall n \in IN$, $\frac{n+2}{n+5} \le \frac{V_{n+1}}{V_n} \le 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1$

5°) a/ Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in IN$, $V_n.V_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b/ En faisant apparaître, dans l'expression précédente le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$, montrer que

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}V_n = \sqrt{2\pi}$

6°) Montrer que : $\forall p \in IN$, $V_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}\cdot\frac{(2^p\cdot p!)^2}{(2p)!}$

Feuille à remettre

Nom et Prénom : ………………………………… Classe : ………

Compléter par vraie (V) ou faux (F) dans la case en face.

1) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = -\frac{1}{2}$ …………………………… ☐

2) $\int_{-5}^{-2} x^2 e^{2x} dx \geq 0$ …………………………… ☐

3) $\int_{-x}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt = 0$ $(x \in [-1,1])$ ……………… ☐

4) $\int_{0}^{-x} t^3 e^{t^2} dt = \int_{0}^{x} t^3 e^{t^2} dt$. ……………………… ☐

5) $\lim_{x \to +\infty} (\ln(x))^5 - x^2 = -\infty$ ……………………… ☐

6) $\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^3} = 0$ …………………………… ☐

7) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}} = 0$ …………………………… ☐

8) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-3e^x + x^2}{2e^x - x^2} = -\frac{3}{2}$ …………………………… ☐

9) Toute similitude indirecte admet un unique point invariant. …………………………… ☐

10) Une similitude directe qui fixe deux points distincts est égale à l'identité du plan …………………………… ☐

11) La réciproque d'une similitude directe de centre I, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est une similitude directe de centre I, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. …………………… ☐

12) Une similitude indirecte de rapport 1 qui fixe un point A est une symétrie axiale d'axe passant par A. ……… ☐

13) **Si** $x^2 \equiv 0 \pmod{n}$ **alors** $x \equiv 0 \pmod{n}$ …………… ☐

14) **Si** $n \equiv 0 \pmod{a}$ et $n \equiv 0 \pmod{b}$ **alors** $n \equiv 0 \pmod{ab}$ ☐

15) Il existe un entier unique $x \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tel que : $7x \equiv 1 \pmod{29}$. …………………………………… ☐

16) L'équation : $18x - 24y = 36$ admet des solutions entières. ☐

Lycée pilote
Gafsa

Mrs: MLIKI A.M.
BEN ALI N.

Devoir de synthèse N° 2
4ième Maths

Exercice 1: (4 pts)

1- On pose, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$

a- Á l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b- Prouver que , pour tout entier naturel n non nul, $0 \le I_n \le \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c- Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$

2- On considère la suite réelle (a_n), définie sur IN* par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

a- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Exercice 2: (4 pts)

1- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 2$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

2- Pour $x \in [1,+\infty[$ on pose $\varphi(x) = \int_1^{\ln x} f(t)dt$

a- Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour $x \in [1,+\infty[$

b- Montrer que φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que pour tout $x > 1$, $\varphi'(x) = \frac{x^2-1}{x\ln x}$

3- a- On pose $h(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}$ pour $x > 1$. montrer que $h(x) = \frac{1}{x-1}\int_0^{\ln x} f(t)\,dt$

b- Montrer qu'il existe un réel $c \in [0, \ln x]$ tel que $h(x) = \frac{\ln x}{x-1} f(c)$

c- En déduire que φ est dérivable à droite en 1.

d- Montrer que φ' est continue à droite en 1

4- a- Vérifier que pour tout $x \ge e$, $\varphi(x) \ge \int_1^{\ln x} \frac{2t-1}{t}\,dt$

b- Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$. Dresser le tableau de variations de φ

Bon travail

Exercice 3:(4 pts)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$

1- a- Démontrer qu'il existe un couple (u , v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$
(On ne demande pas à ce stade de donner un exemple d'un tel couple).
b- Vérifier que si le couple (u , v) est solution de l'équation $19u + 12v = 1$, alors le nombre $N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S).

2- a- Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à
$\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b- Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12\times19]$

3- a- Trouver un couple (u , v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
b- Déterminer l'ensemble des solutions de (S).

4- Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13.
On divise n par 228. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 4:(4 pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O.
On désigne par J le milieu de [AB].
M est un point variable de la droite (D) perpendiculaire en A à (AB).
La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M'.

1- Soit s la similitude directe de centre O telle que s(A)=B.
a- Montrer que, pour tout point M de (D), s(M)=M'.
b- En déduire que, lorsque M décrit (D), le triangle OMM' reste semblable à un triangle fixe que l'on précisera.

2- a- Montrer que, pour tout point M de (D), le point I milieu de [MM'] est l'image de M par une similitude directe S de centre O et dont on précisera le rapport et l'angle.
b- Soit H le projeté orthogonal de O sur (D). Déterminer S(H).
c- Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit (D).

Bon travail

Exercice 5: (4 pts)

z étant un nombre complexe, on pose $f(z) = z^3 - 4iz^2 - (6+i)z + 3i - 1$

1- Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on calculera.

2- En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 de l'équation $f(z) = 0$

3- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives i, $-1+i$ et $1+2i$.

a- Placer M_0, M_1 et M_2

b- Démontrer qu'il existe une similitude directe unique φ de centre M_0 qui transforme M_1 en M_2. Donner une mesure de l'angle et le rapport de cette similitude.
Déterminer l'application complexe associée à φ.

c- Démontrer qu'il existe une similitude indirecte unique ψ de centre M_0 qui transforme M_1 en M_2. Donner le rapport de cette similitude.
Déterminer l'application complexe associée à ψ puis une équation cartésienne de son axe Δ.

Bon travail

Lycée Pilote Gafsa

Devoir de Synthèse n°2 Mathématiques

4M1.. A. MLIK

Exercice n°1: (3pts)

A) Choisir la réponse correcte (sans justification)

1°) Soit n un entier non nul tel que $(5n)\wedge(3^2.5^3.7)=35$ alors

a) $n\equiv 0 \pmod 3$ b) $n\equiv 0 \pmod 5$ c) $n\equiv 0 \pmod 7$

2°) Soit $a = 22^{3n+2}+13^{3n+1}$ où $n\in\mathbb{N}$

a) $a\equiv 1 \pmod 9$ b) $a\equiv 2 \pmod 9$ c) $a\equiv 0 \pmod 9$

3°) On pose $\alpha = 8n-1$ et $\beta = 5n+6$, $n\in\mathbb{N}^*$

– si $\alpha\wedge\beta\neq 1$ alors

a) $\alpha\wedge\beta = 8$ b) $\alpha\wedge\beta=53$, c) $\alpha\wedge\beta = 40$

B) Repond par vrai ou faux en justifiant la réponse

1) La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}dt$ est impaire

2) La droite Δ d'équation $65x-39y-13=0$ passe éxactement par trois points de coordonnés entières

3) Soient f d'écriture complexe : $z'=(1+i)\bar{z}-2i$ et g d'écriture complexe $z' = \frac{1-i}{2}z-5$. alors $f\circ g$ est une symétrie orthogonale

Exercice n°2 (4pts)

Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n = n.7^n+(n+1).7^{n+1}+(n+2).7^{n+2}$

1°) a) Determiner suivant n, le reste de 7^n modulo 19

b) Déduire le reste de a_n modulo 19

2°) Soit $p\in\mathbb{N}$ telque $p\equiv 0 \pmod 3$

a) Montrer que $a_p+a_{p+1}+a_{p+2}\equiv 0 \pmod{19}$

b) Determiner le reste modulo 19 de $\sum_{p=0}^{100} a_p$

Exercice n°3 (4pts)

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. on note H le milieu de $[BC]$.

LYCEE PILOTE TUNIS	CLASSES : 4 MATHS	LE 07/03/2006

Devoir de Synthèse N°2

Mathématiques (4H)

Exercice 1: (5 points)

Soit IBC un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon IB et $O=B*C$. La demi droite $[OI)$ coupe $\mathscr{C}$ en A.

1) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). On note $A'=S_H(A)$ et $J=A*B$.
   a) Montrer que BAH rectangle isocèle en H.
   b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $f(A)=B$ et $f(B)=A'$.
   c) La droite (OJ) coupe (BA') en J'. caractériser f.
2) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme I en O.
   a) Déterminer l'angle et le rapport de S.
   b) Montrer que $S(A)=H$.
   c) Soit $L=S(J)$. Montrer que $L=B*H$.
3) Soit σ la similitude indirecte tel que : $\sigma(J)=H$ et $\sigma(H)=B$.
   a) Déterminer le rapport de σ.
   b) Montrer que $\sigma o\sigma(J)=B$. Déterminer le centre et l'axe de σ.
   c) Déterminer $\sigma(B)$. En déduire que $f=\sigma oS$.

Exercice 2: (5 points)

On considère une ellipse $(\mathscr{E})$ de centre O, de foyers distincts F et F' et de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$. Soit M un point de $(\mathscr{E})$ non aligné avec F et F'. On note H le projeté orthogonal de F sur la tangente Δ à $(\mathscr{E})$ en M (voir figure). On pose $N=S_\Delta(F)$.

1) Montrer que M, N et F' sont alignés.
2) Construire les tangentes à $(\mathscr{E})$ issues de N.
3) La parallèle à (MF) menée de O coupe Δ en K et (HF) en L.
   a) Montrer que OHK est isocèle (on pourra comparer $\widehat{OHK}$ et $\widehat{OKH}$).
   b) Montrer que $O=K*L$ et en déduire que $(F'K)\perp\Delta$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{F'K}=b^2$.
4) La droite (OK) coupe (MF') en W. Déterminer l'ensemble des points W quand M varie.

Lycée pilote de Nabeul	Profs : R. GASTLI - M. BEN BRAHIM - A. LAATAOUI		
	Devoir de synthèse N°2		
Mars 2013	Classes : $4^{ème}$ Maths	MATHEMATIQUES	Durée : 4 h

Exercice n°1 : (4 points)

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant les réponses.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x+1) - x\ln x = 1$

2) Soit la suit U définie sur IN* \ {1} par : $U_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+ \dots\dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Le plus petit entier naturel tel que $U_n > 5$ est 296

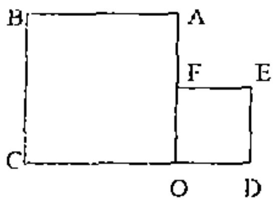
3) la courbe d'équation : $mx^2 + m^2y^2 = 1$, dans un repère orthonormé du plan est une ellipse. si et seulement si, $m > 0$

4) Soient C_1 et C_2 deux coniques de directrice commune D, de même excentricité e de foyers respectifs associés à D , F_1 et F_2.

Tout point commun à C_1 et C_2 appartient la médiatrice de $[F_1F_2]$.

Exercice n° 2 : (4 points)

On considère dans un plan orienté deux carrés OABC et ODEF de sens direct comme l'indique la figure ci-contre :



1) Soit s la similitude directe de centre O et qui transforme A en B.
   a) Préciser le rapport et l'angle de s.
   b) Montrer que : s (D) = E.

2) Soit σ la similitude indirecte qui transforme A en O et O en B.
   a) Trouver le rapport de σ.
   b) Soit Ω le centre de σ. Montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à A.
   c) Trouver ainsi l'axe Δ de σ.
   d) Montrer que $\sigma \circ s^{-1}$ est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

3) Dans cette question on suppose que OA=1 et on considère le vecteur $\vec{i}$ tel que le repère $R\left(O,\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$ soit orthonormé direct

On considère les courbes $(\mathcal{P}_1)$: $x^2+y^2-2x+2y+2xy+2=0$ et $(\mathcal{P}_2)$: $y^2=2(x-1)$

a) Montrer que la transformation complexe de s est : $z'=(1+i)z$

b) Etablir que $(\mathcal{P}_2)$ est une parabole dont on précisera le sommet S_2, le foyer F_2 et la directrice D_2.

c) Montrer $(\mathcal{P}_2)$ est l'image de $(\mathcal{P}_1)$ par s. en déduire la nature de $(\mathcal{P}_1)$ et ses éléments caractéristiques.

Exercice n°3 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(M_0, 1)$, $(M_1, 1)$ et $(M_2, -3)$.

a) Montrer que le point G a pour coordonnées $(2\cos\theta - 1, -4\sin\theta)$.

b) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0, 2\pi[$, alors le lieu géométrique Γ du point G est une conique d'équation : $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

c) Préciser la nature de Γ. Donner les coordonnées de son centre O ', ses sommets et ses foyers.

d) Tracer Γ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2) Soit Δ la tangente à Γ au point G.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Δ est : $2x\cos\theta - y\sin\theta + 2\cos\theta - 4 = 0$.

b) Calculer la distance du point O ' à la droite Δ. Déterminer θ pour que cette distance soit minimale puis maximale.

3) Soit F la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $F(x) = \int_0^{-1+2\cos x} \sqrt{4-(t+1)^2}\, dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \pi]$ et calculer $F'(x)$.

b) Déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$, on a : $F(x) = -2x + \sin(2x) + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Calculer, en unités d'aires, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ.

Exercice n°4 : (7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A- 1/ Etudier la fonction f et tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2/ En déduire que pour tout $x \succ 0$: $xe^{-x} \le \frac{x}{x+1}$.

3/ Soit la suite U définie sur IN par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN : $U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \prec U_n \le \frac{1}{n+1}$

b) On pose pour tout entier naturel non nul n, $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $V_n = \ln\left(\frac{1}{U_n}\right)$.

En déduire la limite de la suite V

B- 1/ Soit la fonction h définie sur IR_+ par $\begin{cases} h(t) = \dfrac{f(-t)}{t} & si\ t \succ 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que h est continue IR_+

2/ Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{\ln x} h(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{x^2 \ln x}$.

b) Montrer que F est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
(on pourra étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto x\ln x - x + 1$)

3/ On pose $H(x) = \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1}$, $x > 1$.

a) Vérifier que pour tout $x > 1$, $H(x) = \dfrac{1}{x-1}\int_0^{\ln x} h(t)dt$.

b) Soit $x > 1$, Montrer qu'il existe $c \in [0, \ln x]$ tel que $H(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} h(c)$.

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1 et déterminer $F'_d(1)$.

4/ a) Montrer que pour tout $x \geq e$, $F(x) \geq \dfrac{1}{e} \times \int_1^{\ln x} \dfrac{1}{t} dt$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

b) Dresser le tableau de variation de F. (On ne cherchera pas à calculer $F(1)$).

Exercice N°1 (3 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1°) Toute similitude de rapport $k \succ 0$ admet un unique point invariant

2°) Soit f d'écriture complexe $z' = (1+i)\,\bar{z} - 2i$ et g d'écriture complexe $z' = \frac{1-i}{2}\,\bar{z} - 5$

f o g est un antidéplacement

3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{x^2} \ln t \, dt \geq 0$

4°) il existe deux entiers n et m tel que $312\,n - 143\,m = 1$

5°) $\begin{cases} x \equiv y\,[6] \\ x \equiv y\,[5] \end{cases}$ équivaut à $x \equiv y\,[30]$.

6°) a et b deux entiers tel que $au + bv = c$
Si c est un diviseur commun de a et b alors pgcd (a, b) = c

Exercice N°2 (4 points)

I)
1°) Déterminer les restes de la division de 4^n par 9 pour n entier naturel.
2°) Soit le nombre $A = (3n-1)\,4^n + 1$
 a) Vérifier que pour tout n = 3q, le nombre A est divisible par 9
 b) Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre A est divisible par 9

II) 1°) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$ où (x, y) est un couple d'entiers relatifs
 a) Donner une solution particulière de (E)
 b) Résoudre (E)

2°) Soit N un entier tel que $\begin{cases} N \equiv 1\ (8) \\ N \equiv 2\ (5) \end{cases}$

 Démontrer que $N \equiv 17\ (40)$

3°) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $8x + 25y = 5$

 a) Démontrer que si (x, y) est une solution de (E') alors $x \equiv 0\,[5]$

 b) Résoudre alors l'équation (E')

4°) a) Soit $d = x \wedge y$, où (x, y) est solution de (E'). Déterminer les valeurs de d

 b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E') dont le pgcd est 5

Exercice N°3 (5 points)

Soit OKFK' un rectangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OK'}}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et OK = 2OK'

La perpendiculaire à (OF) en O coupe (OK) en A et (OK') en A'

Soit S la similitude directe qui transforme O en A' et A en O

1°) a) déterminer l'angle de S

b) prouver que F est le centre de S

c) montrer que le rapport de S est k = 2

d) déterminer S(K)

2°) Soit M un point de la droite $(OA) \setminus \{O, A\}$. Le cercle (C_M) passant par O, F et M recoupe la droite (OA') en M'. On note S (M) = M_1

a) Prouver que $M_1 \in$ (OA') et que $(\widehat{\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1O}})$ (π)

b) En déduire que S (M) = M'

3°) soit Φ la similitude indirecte telle que Φ (O) = A' et Φ (A) = O

a) donner le rapport de Φ

b) déterminer ΦoΦ (A) et en déduire que le centre Ω de Φ appartient à la droite (AA')

c) construire Ω ainsi que l'axe de Φ

4°) On munit le plan d'un Repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK'})$ où J = O * K

a) préciser l'affixe de F dans ce repère et déterminer l'écriture complexe associée a S

b) soit M un point du plan et M' = S (M), On désigne par I le milieu de [MM']

Montrer que $Z_I = \frac{1 - 2i}{2} Z_M + \frac{5}{2} i$

c) déterminer l'ensemble des points I lorsque M varie sur la droite (OA)

PROBLEME (8 points)

A) Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par $g(x) = e^{\sqrt{1-x}}$

1°) a) Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat

b) Dresser le tableau de variations de g

c) Tracer dans un repère orthonormé la courbe Cg

2°) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ puis Tracer dans le 1èr repère sa courbe représentative

3°) a) A l'aide d'une intégration par parties, Calculer l'intégrale $\int_1^e Ln^2 t \, dt$

b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe Cg et les droites d'équations x = 0, x = 1 et y = 1

B)

Soit $I = \int_1^e \frac{dt}{t(1 + Ln^2 t)}$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $F(x) = \int_1^{e^{tg x}} \frac{dt}{t(1 + Ln^2 t)}$

1°) Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que F'(x) = 1

2°) calculer F (0), expliciter F(x) et montrer que $I = \frac{\pi}{4}$

C) 1°) Soit $f_n(x) = (1-\ln^2 x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \frac{1}{2^n}\int_1^{e} \frac{f_n(t)}{t(1-\ln^2 t)}\,dt$

a) montrer que $\forall t \in [1, e]$ on a $0 \le f_n(t) \le 1$

En déduire que $\forall t \in [1, e]$, $\frac{f_n(t)}{t(1+\ln^2 t)} \le \frac{1}{t}$

b) Déduire que $I_n \le \frac{1}{2^n}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

2°) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_1^{e} \frac{f_n(x)}{x}\,dx$

a) vérifier que $U_1 = \frac{2}{3}$

b) montrer que $(\ln x)\left(f'_{n+1}(x)\right) = 2(n+1)\left[f_{n+1}(x) - f_n(x)\right]\frac{1}{x}$

c) en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}U_n$

3°) a) montrer que pour tout réel $t > 0$ et pour tout entier naturel $n \ge 2$ on a :

$$\left[1 + \frac{f_1(t)}{2} + \dots\dots + \frac{f_{n-1}(t)}{2^{n-1}}\right] = \frac{2}{(1+\ln^2 t)} - \frac{1}{2^n}\left[\frac{2\,f_n(t)}{(1+\ln^2 t)}\right]$$

(On pourra remarquer que $\frac{f_n(t)}{2^n} = \left(\frac{f_1(t)}{2}\right)^n$)

b) En deduire que $2I - \left[1 + \frac{U_1}{2} + \dots\dots + \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}}\right] = 2\,I_n$

c) Déterminer alors la limite de la suite $S_n = \left[1 + \frac{U_1}{2} + \dots\dots + \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}}\right]$

L. P. Kairouan	Devoir de synthèse N°2	Prof: Chouihi
Le : 06- 03- 07	Durée : 4heures	Classe: 4M

Exercice (8 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB isocèle rectangle en O et de sens direct et on désigne par I le milieu du segment [AB] . On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon OA, par C le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la demi-droite [IO) et par J le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Soit f la similitude directe de centre A et qui transforme I en O.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

   b) Montrer que le triangle AJC est isocèle rectangle en J.

   c) En déduire que $f(J) = C$.

2) On pose: $I' = f^{-1}(I)$.

   a) Construire I'.

   b) Montrer que les points I, J et I' sont alignés.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en J et J en K ; où K est le milieu de [AC].

   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Soit Ω le centre de g. Caractériser gog.

   c) Déterminer gog(A) et en déduire que $\Omega = C$.

   d) Déterminer l'axe de g.

4) On pose S = gof.

   a) Déterminer S(A) et S(J).

   b) Montrer que S est une symétrie glissante.

   c) Déterminer le vecteur de S et construire son axe Δ.

Problème : (12 points)

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction f_n définie sur IR par :

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{1}{nx}} & \text{si } x < 0 \\ f_n(x) = x^2(\operatorname{Log} x)^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ f_n(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^n} & \text{si } x > 1 \\ f_n(0) = f_n(1) = 0 & \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I.

1°/ a) Montrer que f_n est continue et dérivable en 0.

b) Montrer que f_1 est continue et dérivable en 1.

c) Pour $n \geq 2$: étudier la dérivabilité de f_n en 1.

2°/ a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, la droite $D_n : y = x + \dfrac{1}{n}$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n).

3°/ a) Montrer que pour tout $x < 0$, $f_n'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f_n. On prouvera que f_n atteint des extremums aux points $x_1 = e^{-\frac{n}{2}}$ et $x_2 = e^{\frac{1}{n}}$.

4°/ Construire les courbes (C_1) et (C_3). On précisera en particulier les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. (On ne cherchera pas à étudier leur position relative) unité : 3cm

II.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction F_n définie sur $[1, +\infty[$ par : $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{Log} t}{t^n}\,dt$.

1°/ Calculer $F_1(e)$

2°/ a) Montrer que F_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et déterminer $F'_n(x)$. En déduire que F_n admet une fonction réciproque.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $0 \leq F_n(x) \leq \dfrac{\operatorname{Log} x}{(1-n)x^{n-1}} + \dfrac{\operatorname{Log} x}{n-1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F_n(x)}{x}$.

3°/ On suppose que $n \geq 2$.

a) En intégrant par parties, exprimer $F_n(x)$ en fonction de n et x.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)^2}$

III.

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel $x \in]0,1]$ On pose :

$I_n(x) = \int_x^1 f_n(t)dt$ et $L_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.

1°) a/ Justifier l'existence de $I_n(x)$; pour tout $x \in [0,1]$.

b/ Vérifier que la fonction $\Phi : x \mapsto L_n - I_n(x)$ est l'unique primitive de f_n qui s'annule en 0.

c/ En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} I_n(x) = L_n$.

2°) On considère la fonction F définie sur [0,1] par : $\begin{cases} F(x) = \dfrac{x^3}{3} \text{Log}x - \dfrac{x^3}{9} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a/ Montrer que F est dérivable sur]0,1] et calculer $F'(x)$, pour tout $x \in]0,1]$.

b/ Prouver que F est dérivable à droite en 0 et préciser $F'(0)$.

c/ En déduire la valeur de L_1 .

3°) Soit $\varphi_n(x) = -\dfrac{1}{3}x^3(\text{Log}x)^n$, $x \in]0,1]$

a/ Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi_n(x)$.

b/ A l'aide d'une intégration par parties prouver que :

pour tout $x \in]0,1]$, $I_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x) - \dfrac{(n+1)}{3} I_n(x)$

c/ En déduire que : $L_{n+1} = -\dfrac{(n+1)}{3} L_n$

d/ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $L_n = (-1)^n \dfrac{n!}{3^{n+1}}$

$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{K\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2K\pi, \frac{3\pi}{4} + 2K\pi\right]$

Ex 12 :

$2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

on pose $\cos(x) = X$

$X^2 - 3X + 2 = 0$

$a + b + c = 0$

$\Rightarrow X' = 1 \quad X'' = 2$

$\Leftrightarrow \cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = 2$ impossible

$\Leftrightarrow x = 2K\pi \; ; K \in \mathbb{Z}$

$S_{[0, 2\pi]} \{0, 2\pi\}$

$\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{10\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{210\pi}{5} \end{cases}$

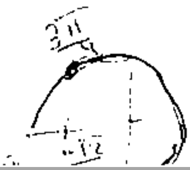
$S \{0, 2\pi\}$

3) $\sin(3x) = 4\sin^2(x)$

Ex 14

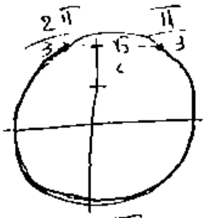
$\sqrt{2}\cos x + 1 \geq 0$

$\cos(x) \geq \frac{-\sqrt{2}}{2}$



b) $2\sin x - \sqrt{3} < 0$

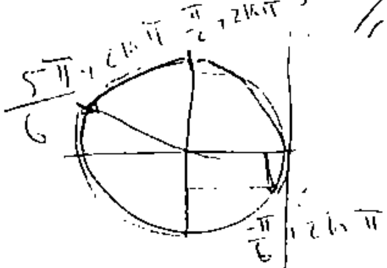
$\Leftrightarrow \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{K\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3} + 2K\pi ; \frac{7\pi}{3} + 2K\pi\right[$

c) $3\tan x + \sqrt{3} \geq 0$

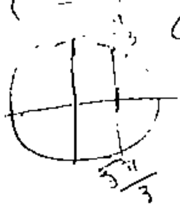
$\Leftrightarrow \tan(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$



$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{K\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2K\pi, \frac{\pi}{2} + 2K\pi\right[\cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2K\pi, \frac{3\pi}{2} + 2K\pi\right[$

d) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{3} + 2K\pi \cancel{<} 2x - \frac{\pi}{6} \cancel{<} \frac{\pi}{3} + 2K\pi$

$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{6} + 2K\pi \cancel{<} 2x \cancel{<} \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{12} + K\pi \cancel{<} x \cancel{<} \frac{\pi}{4} + K\pi$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{K\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{4} + K\pi ; \frac{11\pi}{12} + K\pi\right[$

e) $\cos^2 x - \sin^2 x < \sin(2x)$

$\cos(2x) - \sin(2x)$

$\ldots(2x + \frac{\pi}{4}) <$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} + k\pi < x < \frac{\pi}{8} + k\pi$

$\frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{5\pi}{8} + k\pi$

$S_{IR} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\right[$

$\boxed{\text{Ex } 10}$

$g(x) = 1 - 2\sin^2(x) - 2\sin^2 x$
$= 1 - 4\sin^2(x)$

$g(x) = 2\cos^2(x) - 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2(x) - 1 - 1 + \cos(2x)$
$= 4\cos^2(x) - 3$

2) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $4\cos^2 x - 3 < 0$

$S_{IR} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$

II.

$f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$

$S_{[0,3\pi]} = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{10\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}\right]$

Ex 2

$(x \mapsto x^2 - 3x + 2)$ est polynome ... sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2 - 3x + 3)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

$f'(0) = \frac{3}{4}$ soit T la tan

$D : y = \frac{3}{4}(x - 0) + \left(-\frac{3}{2}\right)$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

~~soit D~~

~~$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$~~ $a \in \mathcal{C}_f$

soit T la tangente de a

$T : y =$ ~~$f'(a)x - af'(a) + f(a)$~~

$f'(a)(x - a) + f(a)$

si $T \perp D \Leftrightarrow \frac{3}{4} f'(a) = -1$

$\Leftrightarrow f'(a) = -\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{(a-3)(a-1)}{(a-2)^2} = -\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3(a-3)(a-1) + 4(a-2)^2}{3(a-2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow$ ~~$f(x) \, (x-3)$~~

$\Leftrightarrow 3(a-3)(a-1) + 4(a-2)^2$

$\Leftrightarrow (3a - 9)(a-1) + 4a^2 + 16 - 16a$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 3a - 9a + 9 + 4a^2 + 16 - 16a =$

$\Leftrightarrow 7a^2 - 28a + 25 = 0$

$a' = \frac{14 + \sqrt{21}}{7}$ $a'' = \frac{14 - \sqrt{21}}{7}$

Ex 3 :

$\lim_{x \to -\infty} x^2\sqrt{x} + 2x - 1 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} + 4 - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - 16 + 8x - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + 4 + x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{8x - 17}{\sqrt{x^2 - 1} - 4 + x}$

$f(1) = 3$

$\lim_{x \to 1} \frac{(m+1)x^3 - 3x + m^2}{x - 1} = 3$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(m+1)x^3 - 3x + m^2 - 3x + 3}{x - 1}$

Ex 6 :

f ... sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim \frac{\frac{x^2 + 1}{x + 1} - 1}{x}$

$= \lim \frac{x^2 + 1 - x - 1}{x(1 + x)}$

$= \lim \frac{x - 1}{x + 1} = -1$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{x} =$

~~$\frac{4x^2 - 9x}{x(2x + 3\sqrt{x})}$~~

$\Rightarrow$ [illegible]

On calcule [illegible]

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en C' et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ en C'

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$

$\Delta_1 \parallel T$

$\Delta_1 : y = x$

$T : y = h'(a)(x-a) + h(a)$

Si $\Delta_1 \parallel T \Rightarrow h'(a) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ ~~$x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x$~~

$\Leftrightarrow -2 = 0$ impossible

$\Delta_2 \parallel T \Rightarrow h'(a) = -1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 + x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = -2}$

1er cas:

$T_1 : y = -1$

$T_2 : y = -1(x+2) + (-5)$

$\boxed{T_2 : y = -x - 7}$

$\boxed{Ex\,8}$:

$g'(a) = \frac{(2x - 2a) - (x^2 - 2ax + a + 1)}{(x-a)^2}$

$= \frac{-x^2 + 2ax + 2x - 3a - 1}{(x-a)^2}$

le sens est négatif.

pour que g garde le même sens

$\rightarrow$ ne s'annule pas.

$g'(x) \neq 0$

$\Delta < 0 \quad \Delta = (2a+2)^2 - 4(3a+1) < 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 8a + 4 - 12a - 4 < 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 8a - 3 < 0$

$\boxed{Ex\,9}$:

$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}$

$f'(x) = \frac{(2x - 6)(x - 2) - x^2 + 6x - 9}{(x-2)^2}$

$= \frac{2x^2 - 4x - 6x + 12 - x^2 + 6x - 9}{(x-2)^2}$

$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

$= \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

x		1		2		3	
$f'(x)$	+	0	-	‖	-	0	+
f	↗	-4	↘	‖ $+\infty$	↘		↗

A. N. C

Ex 1.

a) $i - (3 + 2i) = -3 - i$

b) $2(6 - 5i) - 3(4 + i)$

$= 12 - 10i - 12 \cancel{-} - 3i$

$= -13i$

c) $(5 + 3i)^2 = 25 - 9 + 30i = 16 + 30i$

d) $(5 - 3i)^2 = 25 - 9 - 30i = 16 - 30i$

e) $(5 + 3i)(5 - 3i) = 25 + 9 - 15i + 15i$

$= 34$

f) $(1 + i)(1 + 2i) = 1 - 2 + 3i = -1 + 3i$

g) $i(5 - i)(i - 1) = (-5 + 1 + 5i + i)i$

$= -6 - 4i$

h) $(1 + i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$

i) $(i - 1)^2 = 1 - 1 - 2i = -2i$

j) $(1 + i)(i - 1) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$

k) $i^{4n} = 1$

$i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = -1$

$i^{4n+3} = -i$

Ex 2

a) $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i$ b) $\frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 + 1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

c) $\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{4 + 9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

d) $\frac{3 + 2i}{i} = \frac{-3i + 2}{1} = 2 - 3i$

e) $\frac{3 - 5i}{2 - i} = \frac{(3 - 5i)(2 + i)}{4 + 1}$

$= \frac{6 + 5 + 3i - 10i}{5} = \frac{11 - 7i}{5}$

$= \frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$

f) $\frac{i}{2 + i} = \frac{i(2 - i)}{4 + 1} = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$

g) $\frac{x}{x + iy} = \frac{x(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2}i$

h) $\frac{iy}{x + iy} = \frac{iy(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}i$

Ex 3:

a) $3 + 11i$ b) $-8i$ c) $-2i - 7$

d) $\overline{9i - 2} = -2 - 9i$

e) $\overline{(3 + i)}\,\overline{(-13 - 2i)} = (3 - i)(-13 + 2i)$

$= -39 + 2 + 6i + 13i$

$= -37 + 19i$

f) $\overline{2 + 5i}^6 = (2 - 5i)^6$

Ex 5:

a) $|(4 + 3i)(12 - 5i)| = |4 + 3i| \cdot |12 - 5i|$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-5)^2}$

$= 5 \times \sqrt{169} = 65$

b) $|(2 - 7i)^3| = (|2 - 7i|)^3 = (\sqrt{2^2 + (-7)^2})^3$

$= (\sqrt{53})^3 = 53\sqrt{53}$

c) $\left|\frac{7}{(2 - i)^2}\right| = \frac{7}{|2 - i|^2} = \frac{7}{(\sqrt{5})^2} = \frac{7}{5}$

d) $\left|\frac{3 + i}{\sqrt{15} + i}\right| = \frac{\sqrt{9 + 1}}{\sqrt{15 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

c) $\left|\frac{a+ib}{a-ib}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$

d) $\left|\frac{3-4i}{(1+i)^2}\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{(\sqrt{1+1})^2} = \frac{5}{2}$

e)

$Z = x+iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$Z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$|Z| = |Z^2| = |Z|^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 1$ ou $x^2+y^2=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-1=0$ ou $x^2=0$ ou $y=0$

Ex 4 :

soit G le centre de gravité de ABC

$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \text{aff}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = \text{aff}(\vec{0})$.

$\Rightarrow Z_A - Z_G + Z_B - Z_G + Z_C - Z_G = 0$

$\Rightarrow Z_A + Z_B + Z_C = 3Z_G$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 3Z_G$

$Z_G = 0$.

d'où $G = O$.

2) G bary

A	B	C
2	3	-4

$\vec{AG} = \frac{2}{\cancel{...}}$

$Z_1 = \sqrt{3} + i$

$|Z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\}$ $\theta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Ex 5

$OM' = 1$

$|z' - 0| = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{Z+3}{Z-1-i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|Z+3|}{|Z-(1+i)|} = 1$

$\Leftrightarrow |Z+3| = |Z-(1+i)|$

$\Leftrightarrow AM = BM$

$\Rightarrow M \in \text{med}[AB]$.

b) M' est sur l'axe des réels

$z' = x$

$\Leftrightarrow Z+3 = Zx - x - ix$

Ex 3 :

$|Z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

$|Z_2| = 2$

$|Z_3| = 2$

$|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| \Rightarrow M_1 \in \mathcal{C}$, $M_2 \in$, $M_3 \in \mathcal{C}(O,2)$

$Z_2 - Z_1 = \sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i$
$= -2i$ $\quad \vec{M_2M_1}$

$Z_1 \quad \Rightarrow M_1M_2M_3$

Ex 5 :

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) \equiv \theta [2\pi]$

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN}) \equiv \theta [2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN}) \equiv \theta - \pi [2\pi]$

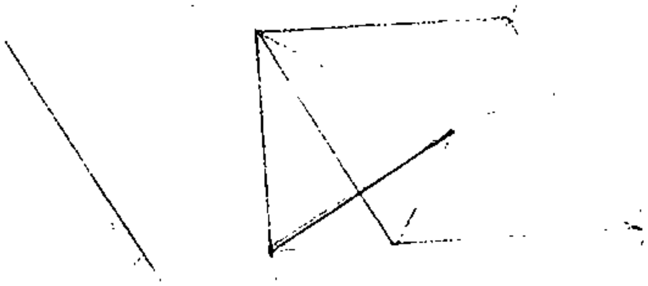
$BN = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) \equiv \theta [2\pi]$

$\overrightarrow{BN} \neq \overrightarrow{AM}$ $\Rightarrow$ il existe une unique rotation de angle θ tel que $\begin{cases} r(B) = A \\ r(N) = M \end{cases}$ et I le centre

donc Δ

tel que $\{I\} = \Delta^{med}_{(AB)} \cap \Delta^{med}_{(MN)}$

Ex 7



$S_{(AC)}(B) = I$

$S_{(AC)}(A) = A$

$\Rightarrow AB = AI$ car la symétrie axiale conserve les distance

d'où $I \in \mathcal{C}$.

• $S_{(AC)}(B) = I \Leftrightarrow (AC)$ est med $[BI]$

donc $(AC) \perp (BI)$

$AB = AI = CI = BC \Rightarrow$ losange

$\begin{cases} IC = IA \\ (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

2 a) $\left.\begin{array}{l} r(C) = A \\ r(A) = D \end{array}\right\} \Rightarrow CA = AD$ donc $\boxed{AD = AB}$ (1)

$\Rightarrow r(C) = A$.

$CA = AD$ or $CA = IA \Rightarrow IA = AD$ donc IAD est un triangle isocèle

• $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \Rightarrow IAD$ équilatéral

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}) [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\equiv \pi [2\pi]$ (2)

D'après (1) et (2) $A = B$

$r(\cancel{BC} * A) = (A * D)$

$\Rightarrow$ $r(\cancel{J}) = \cancel{J}K \Rightarrow \begin{cases} IK = IJ \\ (\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ d'où IKJ est un triangle equilatéral.

1)

$\cancel{r(A) = D}$
$\cancel{r(C) = A}$
$\cancel{r(J) = K}$

$\cancel{r(AC) = AD}$

$r(A) = D \Rightarrow r(AD)$ est la droite passant par D ~~est~~ et $\parallel r(IC)$

$(DE) = r((AD)) \Leftrightarrow \parallel (IA)$

$(CB) \parallel (AI)$

$r((AI)) = (DI) \Rightarrow r((CB))$ est la droite passant par A et $\parallel$ DI

Exercice 1: (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse .

1) P et P' sont deux plans strictement parallèles de l'espace.
   A est un point n'appartenant pas ni à P, ni à P'.
   Il existe une seule homothétie de centre A, transformant P en P'.

2) (EF) et (GH) sont deux droites strictement parallèles de l'espace.
   B est un point de l'espace

S'il existe une homothétie h de centre B transformant (EF) en (GH) alors B appartient au plan (EFG) privé des droites (EF) et (GH)

3) La durée de vie X (en mois) d'une batterie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$.
   La probabilité arrondie au millième, que la batterie survive au moins deux ans est : 0.091

4) Si f est une solution de l'équation différentielle : y + 9 y'' = 0 telle que f '(0) = 0
   alors f est paire

Exercice 2: (3 points)

A/Le tableau suivant donne les dépenses(en milliers de dinars) en médicaments des ménages de 2004 à 2010.

Années	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Dépenses y_i	423	501	673	956	1077	1255	1427

1) Calculer covariance (x , y). Interpréter le résultat

2) a)Déterminer une équation de la droite de régression de y en x (Par la méthode des moindres carrés).

b) En déduire une estimation des dépenses en médicaments des ménages en 2012.

B/En posant $z = \ln(y)$, on a obtenu le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	6,047	6,217	6,512	6,863	6,982	7,135	7,263

1) Calculer le coefficient de corrélation de la série (x_i, z_i) .

2) La droite de régression de z en x a pour équation: $z = 0.21\,x + 6.08$.
En utilisant cet ajustement, donner une estimation des dépenses en médicaments, des ménages en 2012.

C/ Laquelle des deux estimations précédentes est la plus raisonnable ? Justifier.

Exercice 3: (4 points)

R = (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormé direct du plan

1) Soit E l'ensemble des points M(x, y) vérifiant $4x^2 + y^2 - 8x = 0$

a) Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera le centre, l'excentricité, les sommets et les foyers.

b) Vérifier que les foyers appartiennent au cercle(C) de centre O et de rayon 2.

Tracer (E) et construire ces foyers.

c) Monter qu'il existe deux tangentes à (E) issues du point A(–2 , 0).

2) Soit M(a, b) un point variable du cercle (C) de centre O et de rayon 2 et H le projeté orthogonal de M sur la droite D : x = 2.

a) Déterminer, en fonction de a et b, les coordonnées du point I milieu de [MH].

b) Montrer que lorsque M varie sur le cercle (C), I varie sur une ellipse.

Exercice 4: (5 points)

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente.

Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner une seule place de cinéma et 40% permettent de gagner deux places.

1) Un client achète une tablette. On considère les événements :

G « la tablette est gagnante »,

U « le client gagne une seule place de cinéma » .

D « le client gagne deux places de cinéma ».

a) Donner p(G), p (U/G) et p (D/G).

b) Montrer que p(U) = 0.3.

c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de place gagnées.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

2) Un client achète une tablette de chocolat chaque jour. Pendant n jours, $n \geq 2$.

Soit p_n la probabilité de l'événement « le client gagne 2(n – 1) places de cinéma ».

a) Montrer que $p_n = \dfrac{9n^2+11n}{8 \cdot 5^n}$

b) Calculer la limite de p_n en $+\infty$.

3) Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat .

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de places gagnées.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Soit F la fonction de répartition associée à Y. Montrer que $F(\frac{2013}{2012}) = \frac{11}{20}$.

Exercice 5: (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = t\,e^{-t}$

1) a) Dresser le tableau de variations de f. En déduire que f est bornée.

b) Montrer alors que pour tout réel $t \geq 0$, on : $f(t)\, e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on note F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n \, dt$.

a) Prouver que $[f(t)]^n \leq e^{-\frac{t}{2}}$. On pourra utiliser la question 1).

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $F_n(x) \leq 2$.

c) Prouver alors que $F_n(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on définie la fonction G_n sur $[0, +\infty[$ par $G_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} \, dt$.

a) Expliciter $G_1(x)$.

b) Montrer que $G_{n+1}(x) = (n+1)\, G_n(x) - x^{n+1}e^{-x}$.

c) En déduire, en raisonnant par récurrence, que $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = n\,!$.

4) a) Montrer que $(G_n)'(nx) = n^n [f(x)]^n$.

b) Prouver alors que $F_n(x) = \frac{1}{n^{n-1}} G_n(nx)$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.