LPBT **Mr Masmoudi. R**

Sujet de révision N°2

EXERCICE 1 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'équation (E) : $z^3 = i(z-1)^3$.

1)a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz^2 - (2+i)z + 1 = 0$.

b) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $z^3 + [i(z-1)]^3 = 0$.

c) Déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.

2) a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $|z| = |z-1|$.

b) Déterminer alors l'équation cartésienne de l'ensemble (D) des points M d'affixes z tels que $|z| = |z-1|$.

3) Soit M un point d'affixe z.

a) Montrer que M appartient à (D) si et seulement si $z - 1 = -\bar{z}$.

b) En déduire la relation : $\arg(z) + \arg(z-1) \equiv \pi[2\pi]$.

4) On prend $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exprimer r en fonction de θ.

5) a)Déterminer les valeurs de θ pour que z soit solution de (E).

b) Utiliser ce qui précède pour déterminer les solutions de l'équation (E).

c) Déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 :

Le plan est orienté. On considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que AB≠AD;
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct.

1- a) Montrer que AB=ED
   b) En déduire qu'il existe une rotation r tel que r(A)=E et r(B)=D. Préciser son angle θ et construire son centre I

2- L droite (EC) coupe (AB) en F
   a) Montrer que triangle AEF est équilatéral et que r(F)=A
   b) En déduire que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AEF

3- Soit r' la rotation de centre c et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Trouver r'(F) et r'(D) et en déduire que les droites (FD) et (BE) se coupe en J et que $(\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

4- Soit Γ le cercle de centre Ω circonscrit au triangle ABD
  a) Montrer que Γ passe par I et J
  b) Montrer que I, O et Ω sont alignés sur une droite Δ

5- a) Caractériser le déplacement f tel que f(B)=A et f(C)=D

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement σ tel que σ©=D et σ(B)=A.

Donner les éléments caractéristiques de σ

6- Soit $S=\sigma o S_{(BD)}$
  a) Donner la nature de S
  b) Donner les éléments caractéristiques de S

EXERCICE 3 :

Partie A :

1) Soit p un entier naturel non nul et m un entier naturel impair.

Vérifier que $p \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}(1+p))$ puis montrer que $1+p$ divise $1+p^m$.

2) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant un raisonnement par l'absurde montrer les deux propositions suivantes :

a) **Si** $1+a^n$ est un nombre premier **alors** a est pair.

b) **Si** $1+a^n$ est un nombre premier **alors** n est une puissance de 2 (On posera $n = 2^{\alpha} \times q$ où α un entier naturel et q est un entier naturel impair différent de 1).

3) Les nombres $1+2019^{32}$ et $1+2020^{12}$ sont-ils premiers (Justifier la réponse).

Partie B :

1) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres entiers par $u_n = 1+6^{2^n}$.

a) Vérifier que $u_3 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod} 17)$.

b) Soit n et k deux entiers naturels avec k≥1 . Vérifier que $u_{n+k} - 1 = (u_n - 1)^{2^k}$.

c) En déduire que $u_{n+k} \equiv 2 \quad (\mathrm{mod}\ u_n)$.

d) Prouver que deux termes distincts de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont premiers entre eux.

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, le chiffre des unités de u_n est égal à 7.

3) Les entiers u_n sont –ils tous premiers ?

EXERCICE 4 :

A) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$, si $x\neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

On note (C_n) la représentation graphique de f_n dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que f_n est continue et dérivable à droite en o.

2) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f_n'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f_n(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_n.

4) Montrer que la droite D_n: $y = x-n$ est une asymptote à (C_n).

5) Construire (C_1) et (C_2).

6) Pour $x>0$, on pose : $F_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{-1}{x}} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}\int_1^x e^{-\frac{1}{t}}\,dt$.

   b) En déduire que pour $x\geqslant 1$ on a : $F_1(x) \geqslant \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}}\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{2e}$.

B)

1) Montrer qu'il existe un réel unique a_n tel que : $f_n(a_n) = 1$.

2) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n > 1$ et que : $a_n\ln(a_n) = n$.

3) Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x$.

   a) Montrer que g est une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

   d) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(a_n)+\ln(\ln(a_n)) = \ln(n)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(a_n)}{n} = 0$.

   e) Montrer que $f_n(a_{n+1}) = e^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

C) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose: $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(t)dt$, J_n la valeur moyenne de f_n sur $[a_n; a_{n+1}]$ et

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1 \leqslant J_n \leqslant e^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3) Pour $x>0$, on pose $F_n(x) = \int_1^{\frac{x}{n}} f_n(t)dt$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que F_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $F'_n(x) = f_1\left(\frac{x}{n^2}\right)$.

   b) En déduire que pour tout $x>0$: $F_n(x) = n^2 F_1\left(\frac{x}{n^2}\right) - n^2 F_1\left(\frac{1}{n}\right)$.

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.