Lycée Pilote de L'Ariana	MATHEMATIQUES	$4^{ème}$Maths
Mai 2021	Proposition :2 « Bac Blanc »	Durée : 4 heures

Exercice 1 : 3points

1) Déterminer selon la parité d'un entier naturel n, le reste de la division euclidienne n^4 par 16.
2) On désigne par a et b deux entiers premiers entre eux .Soit $N = a^4 + b^4$. déduire les restes possible de N modulo 16.
3) Soit p un nombre premier impair, diviseur de N.
   Montrer que $p \wedge a=1$ et $p \wedge b=1$.

4)a)Montrer qu'il existe un entier c tel que $ac \equiv -1\ [p]$.

b)Déduire qu'il existe un entier x tel que $x^4 \equiv -1 [p]$.
c)Soit r le reste de la division euclidienne de p par 8.
Montrer que $x^{r-1} \equiv 1 [p]$. en déduire que r = 1.

Exercice 2 : 3points

Dans le quartier « Ariana : Zone LPA » la municipalité a crée des parkings payants pour les véhicules .Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2Dinars par jour. par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 50 dinars .

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie . cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.

Si un automobiliste désire se garer dans l'un de ses parkings il effectue un tirage de deux tickets successivement et avec remise de l'urne.

- Si les deux tickets sont gagnants le stationnement est gratuit.
- Si l'un est gagnant et l'autre non il stationne à 1Dinar seulement
- Si aucun ticket n'est gagnant alors il stationne à 2 Dinars.

1) M.BHIRI désire se garer dans cette zone. On note X la variable aléatoire définie par le montant à payer pendant un jour à la municipalité de l'Ariana. Etablir la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
2) On admet que la probabilité pour qu'un automobiliste d'être interpelé par la police municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors payer l'amende est $\frac{4}{5}$.
   Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit . Les risques d'amendes sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre .
   - Calculer en fonction de n la probabilité p_n qu'il paye au moins une fois l'amende.
   - Calculer le plus petit entiers naturel n pour que $p_n \geq 0.99$.
3) Mr Bhiri , exerçant dans cette zone , paye en moyenne 4,800 Dinars pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants Il estime que les stationnement payants lui reviennent trop chers et décide d'aller travailler dans un autre quartier de l'Ariana où le stationnement dans un endroit qui est interdit « l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5 dinars » .
   Dans se nouveau quartier Mr Bhiri prend le risque de ce garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine

Soit Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine

Déterminer la loi de probabilité de Y

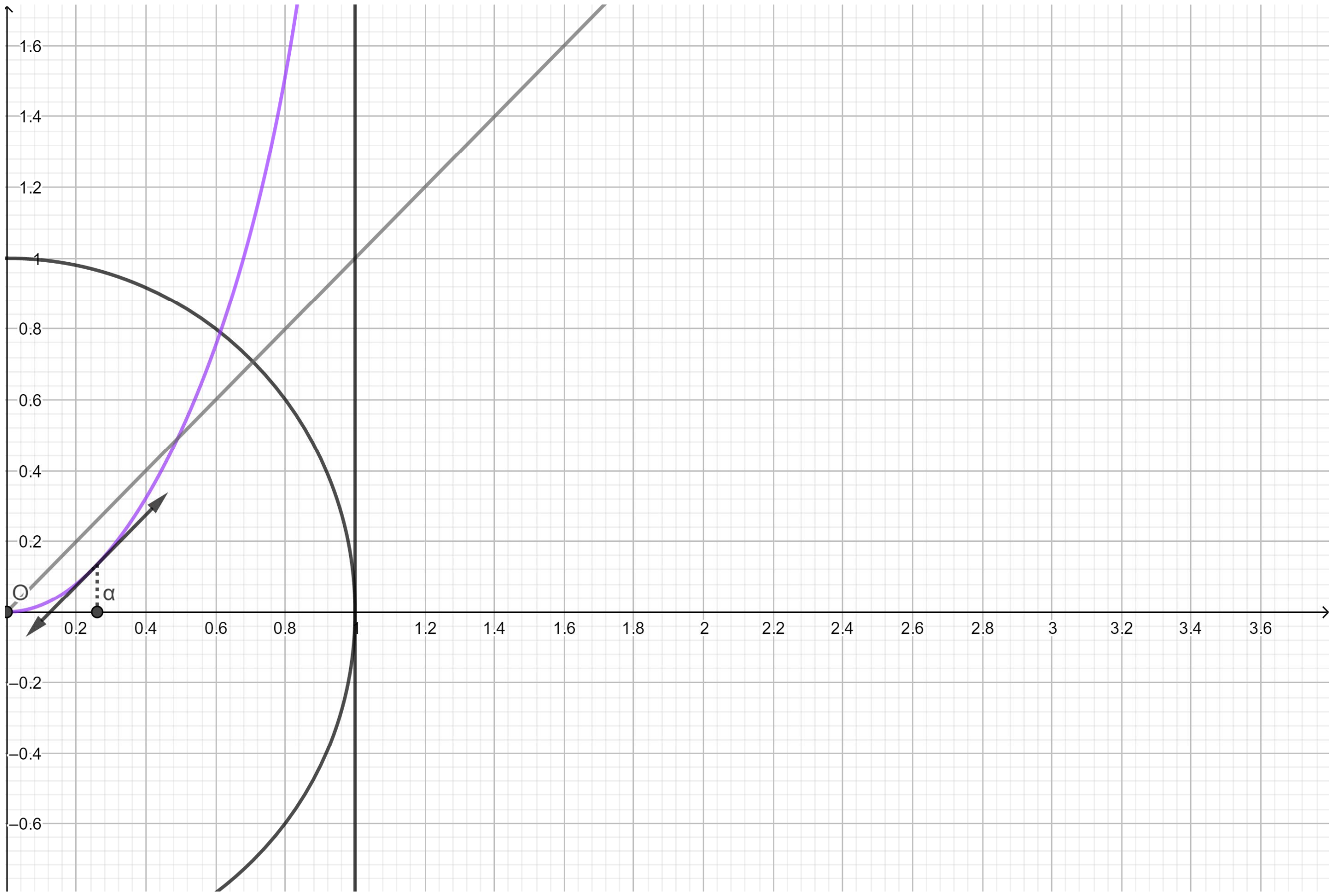
Mr Bhiri a-t-il intérêt de changer de quartier ?

Exercice 3 : 6points

Soit f la fonction définie sur] – 1 , 1 [par f(x) =$\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$.

1) Justifier pourquoi il suffit d'étudier f sur [0 , 1 [

On donne ci-dessous la courbe de la restriction h de f à [0 , 1 [ainsi que la tangenteΔ au point d'abscisse α .



2) Par lecture graphique dresser le tableau de variation de f et préciser f'(α) et f'($-\alpha$)
3) Calculer f'(x) pour tout réel x de [0 , 1 [. Montrer que $\alpha = \sqrt[4]{1-4\alpha}$.
4) Montrer que h admet une fonction réciproque g continue sur un intervalle J.
5) Expliciter g(x) pour tout réel x de l'intervalle J.
6) Soit A l'aire du domaine (D) du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites (x = 0) et (x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$)

- Hachurer le domaine (D)
- A l'aide d'une intégration par parties montrer que A = $\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{4x^2}{1-x^4}\,dx$.

7) Soit G la fonction définie sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Etudier : parité et dérivabilité de la fonction G puis calculer G'(x) et $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

8) Déterminer les réels a , b et c tels que $\frac{4x^2}{1-x^4} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x^2}$. calculer alors A.

9) Soit la suite (I_n) définie sur IN par $I_n = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x^{4n+2}}{1-x^4}\,dx$.

   a) Montrer que la suite (I_n) est convergente vers 0 .

   b) Calculer I_0. Puis $I_{n+1} - I_n$ en fonction de n .

   c) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k+3)9^{k+1}}$ en déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 4 (5 points)

Soit ABC un triangle rectangle direct en B tel que I le milieu de [AB], J le milieu de [AC], et Δ la droite perpendiculaire à (AB) en A.

1) Caractériser chacune des isométries $S_I \circ S_{(AB)}$, $S_I \circ S_\Delta$ et $S_I \circ S_A$.

2) Soit E l'ensemble des isométries qui fixent A et qui transforme Δ en Δ .
Soit f un élément de E.

a) Montrer que f n'est ni une translation ni une symétrie glissante.

b) Montrer que si f est une symétrie orthogonale, alors $f = S_{(AB)}$ ou $f = S_\Delta$

c) Caractériser f lorsqu'elle est une rotation.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

3) Soit F l'ensemble des isométries qui transforment A en B et Δ en (BC).

a) Montrer que $f \in F$ si et seulement si $S_I \circ f \in E$

b) Déterminer alors l'ensemble F.

Exercice 5 3points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'équation E_m : $m^2 Z^2 + m^3 Z + 1 - i m^2 = 0$ où m est un paramètre complexe non nul .

1) Résoudre E_1 .
2) Déterminer les complexes m pour lesquels (1 + i) est une solution de E_m. (donner l'autre solution).
3) Résoudre E_m .
4) On considère les points A($a = -m - \frac{i}{m}$) , B($\frac{i}{m}$) et M(m). M étant non nul on note θ la mesure principale de $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. Soit $Z = \frac{m-a}{m-b}$.

   a)Déterminer les valeurs possibles de θ pour que Z soit réel.

   b)En déduire l'ensemble des points M(m) pour que les points A , B et M soient alignés.
5) a)Donner la forme complexe de la rotation R de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   b)Déterminer les affixes a' , m' et b' respectivement des points A'= R(A) , M' = R (M) et B'= R^{-1}(M)

   c)Soit z_I l'affixe de I le milieu de [AM]. Calculer $\frac{b'-a'}{b-z_I}$ puis conclure .