

**Exercice 1 vrai ou faux**

1) Soit  $g_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g_n(x) = (1+x)e^x - n$ , On désigne par  $C_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- l'équation  $g_n(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha_n$
- $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1+\alpha_n}\right)$  et  $0 < \alpha_n < \ln(n)$
- $g_n(\ln\sqrt{n}) \geq 0$ .
- la suite  $(\alpha_n)$  est convergente.

2) Soit  $f$  une fonction impaire et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $(C)$  la représentation graphique  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé

On suppose que  $f(2)$  et  $f(-1)$  sont solutions de l'équation :  $t^2 - 5t - 9 = 0$ .

- L'image de  $\mathbb{R}$  par  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
- $(C)$  admet un point d'inflexion.
- Il existe au moins un point  $M$  d'abscisse  $c$  appartenant à  $]1, 2[$  tel que  $(C)$  admet au point  $M$  une tangente parallèle à la droite  $D : 5x - 3y + 2 = 0$ .

3) ABC est un triangle équilatéral de sens direct, inscrit dans le cercle  $(C)$ . Le point D est diamétralement opposé à A.

I le milieu de  $[AB]$  et  $\Delta$  la tangente au cercle  $(C)$  au point C

- $S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$  est une translation.
- $S_{\Delta} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$  est une symétrie glissante
- $r_{(A, \frac{\pi}{6})} \circ S_{(AC)}$  est une symétrie orthogonale

**Exercice 2:** Un animateur fabrique des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0.02.

- On achète 50 composants. Soit  $X$  l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de composants défectueux parmi les 50 achetés.
  - Calculer  $p(\{X=2\})$  et  $p(\{X \geq 1\})$ .
  - Calculer le nombre moyen de composants défectueux dans un lot de 50 composants achetés.
  - Soit  $F$  la fonction de répartition associée à  $X$ . Calculer  $F(49,99)$

2) On suppose que la durée de vie  $T$  (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0.005$ .

- Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant défectueux soit supérieur à 1000 heures.
- Calculer la probabilité qu'un composant défectueux soit en marche pendant 100 heures.
- Durant la soirée « Réussite au baccalauréat » l'animateur dispose d'un CD « Musique classique » dont la durée est de 30 minutes

On appelle  $T$  la variable aléatoire qui donne, en minutes, le temps écoulé entre la mise en marche du CD et le changement de musique.

que  $T$  suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle  $[0 ; 30]$ .

- Quelle est la probabilité qu'un invité écoute de la musique classique plus que 10 minutes ?
- Sachant qu'après 10 minutes l'invité écoute de la musique classique qu'elle est la probabilité qu'il entend encore de la musique classique au bout de 28 minutes ?

**Exercice 3:**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- Déterminer les racines carrées de  $3 + 4i$
- Résoudre l'équation :  $z^2 - 2(1 + 2i)z - 6 = 0$
- Soit l'équation (E) :  $z^3 - 4(1+i)z^2 + 2(-1+4i)z + 12 = 0$ 
  - Vérifier que 2 est une solution de (E)
  - Résoudre alors (E)
- On considère les points A, B et C les points d'affixes respectives  $a = 2$ ,  $b = 3 + 3i$  et  $c = -1 + i$ 
  - Ecrire  $b$  et  $c$  sous forme exponentielle
  - Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle en A

**Exercice 4** L'espace  $\xi$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $A(2, 1, 1)$ ;  $B(3, -1, 0)$  et  $C(1, 1, -1)$

- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Trouver une équation cartésienne du plan  $P = (ABC)$ .
- Ecrire une équation de chacun des plans R et Q médiateurs respectifs de  $[AB]$  et  $[AC]$ .
- Soit  $\Delta = R \cap Q$ , déterminer une représentation paramétrique de  $\Delta$ .
- Soit E le point de  $\Delta$  d'abscisse  $\frac{1}{2}$ . Déterminer le rayon de la sphère S de centre E qui rencontre le plan P selon un cercle de rayon  $\sqrt{\frac{140}{29}}$
- Calculer le volume du tétraèdre EABC.

**Exercice 5** Un marchand de glace propose 5 parfums au choix

- Trois personnes choisissent, au hasard et indépendamment, un des parfums proposés.
  - Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
    - « les trois personnes choisissent le même parfum »
    - « Deux personnes seulement choisissent le même parfum »
    - « au moins deux des trois personnes choisissent le même parfum »
  - Sachant que deux personnes ont choisi le même parfum qu'elle est la probabilité pour que le troisième choisi le même parfum que les deux autres ?



2) Pendant trois jours, deux personnes choisissent chaque jour, au hasard et indépendamment, deux des parfums proposés.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A « les deux personnes choisissent les mêmes parfums »

B « au moins un jour, les deux personnes choisissent les mêmes parfums »

**Exercice 6 :** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, u, v)$

Soit  $H = \{M(z) \text{ vérifiant } \operatorname{Re}(z^2) = 9\}$

1) a) Caractériser et construire H.

b) Ecrire une équation de D la tangente à H au point  $M(5, 4)$

2) On désigne par E l'ellipse de centre O, de foyer

$F(0, 4)$  et de directrice  $D_F : y = \frac{25}{4}$

a) Calculer l'excentricité e de E.

b) Ecrire une équation de E. Déterminer l'intersection de H et E.

3) Montrer que E et H sont tangents en leurs points communs.

4) Soit N un point de l'intersection de E et la droite  $y = \frac{125}{36}x$ . Montrer que la tangente T à E au point N est perpendiculaire à D.

**Exercice 7 :**

I / Soit f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1-x)e^{2x} - 1$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé

$(o, \vec{i}, \vec{j})$ . (unité 2 cm)

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  deux solutions 0 et  $\alpha$  avec  $0.7 < \alpha < 0.8$

b) Donner alors le signe de f(x)

3) a) Montrer que O est un point d'inflexion de (C) et écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point O.

b) Tracer (C) et (T).

4) Soit  $m \in \mathbb{R}^+$  : a) Calculer l'aire  $I_m$  de la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations :  $y = -1$  ;  $x = m$  et  $x = 0$ .

b) Calculer  $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m$

II / Soit g la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
 (Γ) la courbe de g dans un

repère orthonormé  $(o', \vec{u}, \vec{v})$ . (unité 4 cm)

1) a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[$  ;

$$g'(x) = \frac{f(x)}{(e^{2x}-1)^{\frac{3}{2}}}$$

b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Montrer que  $g(\alpha) = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$  puis tracer (Γ).

(on prend  $\alpha = 0.8$ )

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^+$ . On pose  $U_n = \int_n^{2n} g(t) dt$

a) Montrer que  $\forall t \in [n, 2n]$  on a :

$g(2n) \leq g(t) \leq g(n)$

b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^+ ; n g(2n) \leq U_n \leq n g(n)$

c) Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Problème :**

A/ 1) Soit g définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$

a) Etudier le sens de variations de g.

b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une

solution unique  $\alpha$  telle que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

c) Montrer que  $\alpha = -\ln(\alpha)$

2) Montrer à l'aide d'intégrations que  $\ln(x) < x$ , pour tout réel  $x > 0$

B/ Soit f définie sur  $[0, +\infty[$  par

$f(x) = e^x - x \ln(x)$  si  $x > 0$

$f(0) = 1$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , (unité : 2 cm)

1) a) Montrer que f est continue en 0 à droite

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite, interpréter graphiquement le résultat

2)

a) Montrer que  $f(x) > e^x - x^2$ ,  $\forall x > 1$

b) En déduire la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) a) Vérifier que  $f''(x) = g(x)$ , pour tout  $x > 0$

En déduire le sens de variation de f'

b) Soit  $a = f'(\alpha)$ . Montrer que :  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha^2$  et

$$a = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1$$

c) Montrer que :  $f'(x) > 1$ ,  $\forall x > 0$

Dresser alors le tableau de variation de f

4) Soit D la tangente à (C) au point d'abscisse  $\alpha$

a) Montrer qu'une équation de D est  $y = a(x+1)$

b) Etudier alors la position de D par rapport à (C)

5) Construire (C) et D. On prend  $\alpha \approx 0.57$

6) a) Calculer à l'aide d'une intégration par partie et en fonction de  $\alpha$  l'intégrale  $\int_{\alpha}^1 x \ln(x) dx$

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $(x=1)$  et  $(x=\alpha)$ .

Montrer que  $A = 1 + 4e^{-\frac{4}{\alpha}} - 2\alpha^3 - \alpha^2$

7) Soit u définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = \int_0^1 (f(x))^{-n} dx$

a) Montrer que  $u_n > 0$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Montrer que u est décroissante. En déduire qu'elle est convergente

c) Montrer que  $f(x) \geq x+1$ . Déterminer alors la limite de u.



**Exercice 8 :**

On considère dans un plan orienté un triangle ABC tel que  $AC = 4$ ,  $AB = 2$  et  $(\vec{AC}, \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

1) Soit  $f$  la similitude directe qui transforme A en C et B en A.

- a) Déterminer le rapport et l'angle de  $f$ .  
 b) On note  $\Omega$  le centre de  $f$ . Caractériser  $f$  et construire  $\Omega$ .  
 c) On désigne par  $E = S_{(AB)}(\Omega)$  et  $F = S_{(AC)}(\Omega)$ . Montrer que A est le milieu de  $[EF]$  et que  $f(E) = F$ .  
 2) Soit  $g$  la similitude indirecte de centre  $w$ , qui transforme E en  $\Omega$  et  $\Omega$  en F.

- a) Déterminer le rapport de  $g$ . caractériser alors  $g \circ g$   
 b) En déduire que  $w \in (EF)$ .  
 c) Déterminer  $g \circ f^{-1}(\Omega)$  et  $g \circ f^{-1}(F)$ . puis montrer que  $g \circ f^{-1} = S_{(AC)}$ .  
 3) a) Déterminer  $g(A)$  et  $g(B)$ . En déduire que  $w \in (BC)$ .

- b) Construire alors  $w$  et l'axe  $\Delta$  de  $g$ .  
 4) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{AC}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{AB})$   
 a) Déterminer les affixes de chacun des points A, B et C.  
 b) En déduire la forme complexe de la similitude  $f$ . En déduire l'axe de  $\Omega$ .  
 c) Vérifier que :  $g(M(z)) = M'(Z') \Leftrightarrow Z' = -2i\bar{z} + 4$

Donner l'axe de  $w$  et une équation cartésienne de  $\Delta$ .

**Exercice 9**

On donne dans un plan orienté un rectangle ABCD de sens direct tel que  $AB = 2AD$   
 On désigne par I et J les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[DC]$ .

- 1) Soit  $f$  la similitude directe qui envoie D en C et I en J.  
 a) Déterminer le rapport et l'angle de  $f$ .  
 b) Montrer que  $f(C) = I$ .  
 c) Construire les points  $E = f(A)$  et  $F = f(B)$ .  
 d) Prouver que F est le milieu de  $[DI]$  et que E et F sont symétriques par rapport à J.  
 2) Soit  $\Omega$  le centre de  $f$ .  
 a) Montrer  $\Omega$  que appartient au cercle de diamètre  $[DI]$ .  
 b) En déduire que  $(AC)$  coupe  $(EI)$  en  $\Omega$ .  
 3) Soit  $g = S_J \circ f$  où  $S_J$  est la symétrie centrale de centre J. On désigne par  $L = S_J(E)$ .

Déterminer nature et éléments caractéristiques de  $g$ .

a) Soit M un point du plan distinct de D et soit  $N = g(M)$ .

Montrer que le triangle DMN est rectangle isocèle de sens direct.

- b) En déduire une construction du point  $M' = f(M)$ .  
 4) Soit  $\varphi$  la similitude indirecte qui envoie F en L et E en I.  
 a) Déterminer les éléments caractéristiques de  $\varphi$ .  
 b) Soit  $\sigma = \varphi \circ g \circ S_{(AI)}$ . Déterminer  $\sigma(A)$  et  $\sigma(I)$   
 c) Caractériser  $\sigma$ .

**Exercice 10 :****Questions indépendantes**

- 1) Pour tout entier  $p$  de l'intervalle  $[1;46]$ , Montrer qu'il existe au moins un entier relatif  $q$  tel que  $pq \equiv 1 [47]$   
 2) a et b sont deux entiers naturels tels que  $24a \wedge 64b = 64$ , Déterminer le reste de la division euclidienne de a par 8  
 3) La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

$X_i$	1	-1	2
$P(X=x_i)$	$e^a$	$e^b$	$e^c$

où a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique de X est égale à 1 calculer  $p(X = 1)$ .

**Exercice 11 :**

Soit  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$  un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les points  $A(2,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$ ,  $L(1,1,2)$  et l'homothétie  $h$  de centre O et de rapport 3. On pose  $h(A) = E$ ,  $h(B) = F$ ,  $h(K) = G$ ,  $P = (ABK)$  et  $Q = (EFG)$ .

- 1) a) Calculer les composantes du vecteur  $\vec{KA} \wedge \vec{KB}$ .  
 b) En déduire l'aire du triangle KAB et le volume du tétraèdre LKAB.  
 c) Vérifier que le vecteur  $\vec{OL}$  est normal au plan P.  
 2) a) Justifier que :  $\vec{EF} = 3\vec{AB}$  et  $\vec{EL} = -5\vec{OI} + \vec{OJ} + 2\vec{OK}$ .  
 b) Montrer que les points E, F, G et L sont coplanaires.  
 c) On note H le projeté orthogonal de L sur P.

Montrer que  $h(H) = L$ , en déduire les coordonnées de H.  
 d) Calculer HL et retrouver le volume du tétraèdre LKAB.

- 3) a) Montrer qu'il existe une seule sphère (S) tangente au plan (Q) en L et passant par I.  
 b) Déterminer les coordonnées de son centre  $\Omega$  et calculer son rayon R.

c) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle. Préciser le centre et le rayon.



**ANNEXE**

Nom & Prénom .....

Classe .....

Figure 1 : Exercice 2

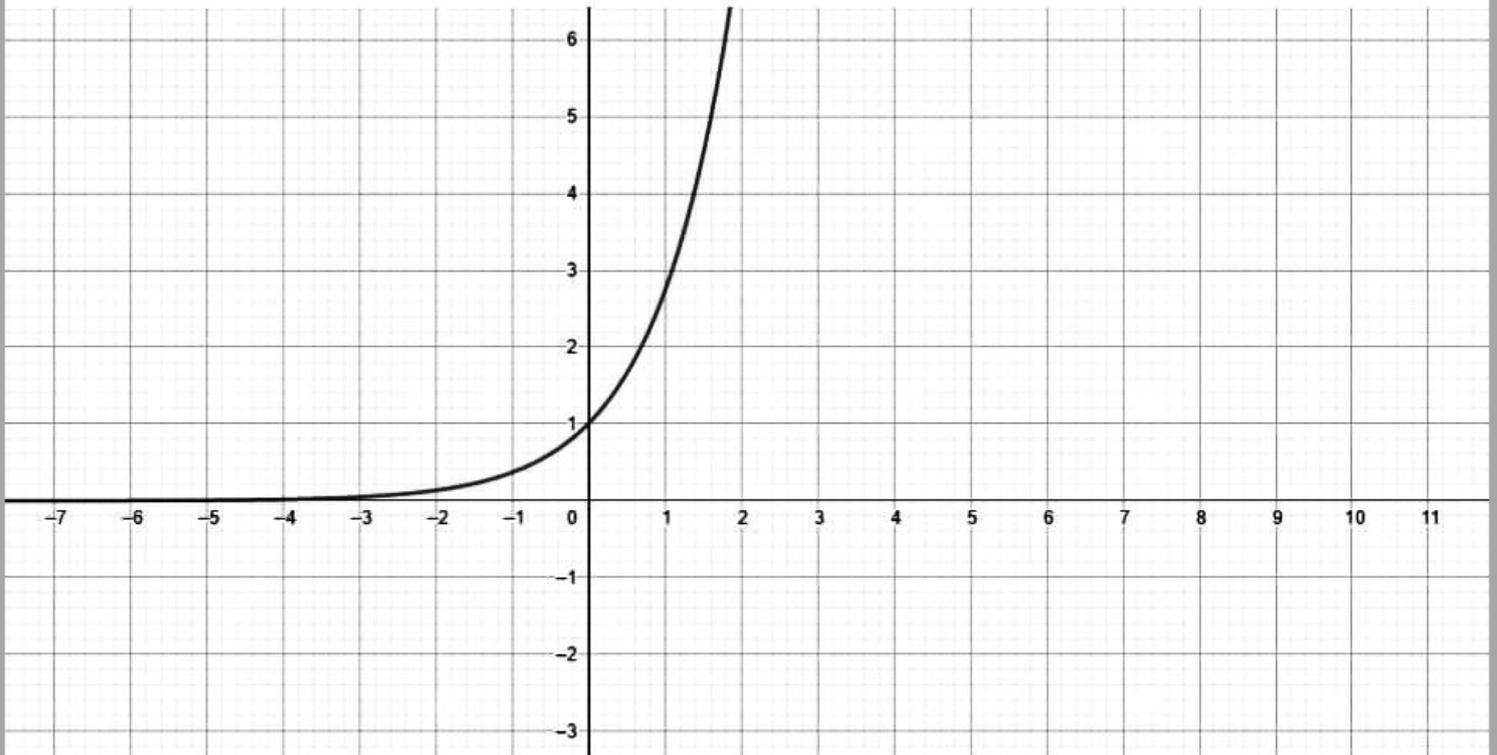
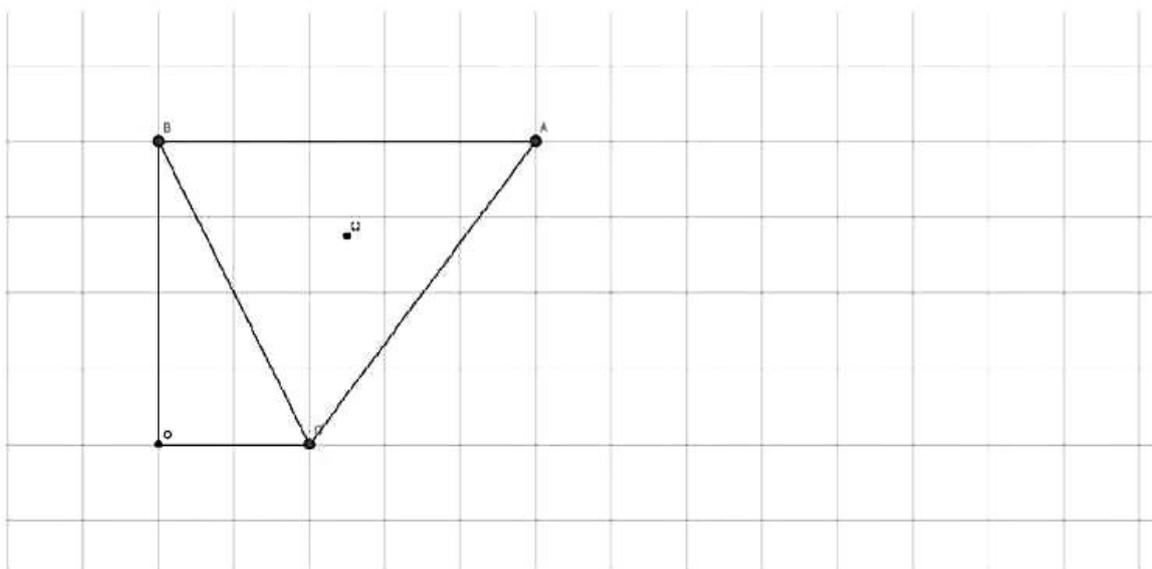


Figure 2 : Exercice 3



**Exercice 1 : ( 2 points)**

Cocher la bonne réponse. En justifiant.

1) Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  tel que  $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$   
 $f$  est une solution de l' équation différentielle :

- a)  $y'' - y = 0$       b)  $y'' + y = 0$       c)  $y'' + y = 1$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Lorsque  $t$  varie sur  $\mathbb{R}$ , le point  $M\left(\frac{3^t + 3^{-t}}{2}, \frac{3^t - 3^{-t}}{2}\right)$  varie sur :

- a) une hyperbole que l'on caractérisera .  
b) une ellipse que l'on caractérisera.  
c) une parabole que l'on caractérisera.

**Exercice 2 : (5.5 points)**

I/ Soit  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$

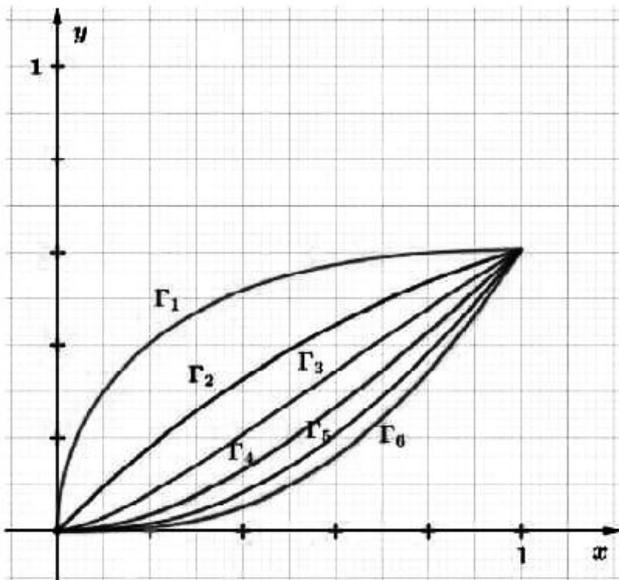
- a. Etudier la dérivabilité de  $g$  à droite en 0.  
b. Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $g'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}}$   
c. Dresser alors le tableau de variation de  $g$ .

2. Dans l'annexe (figure 1), on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe de la fonction  $f : x \mapsto e^x$

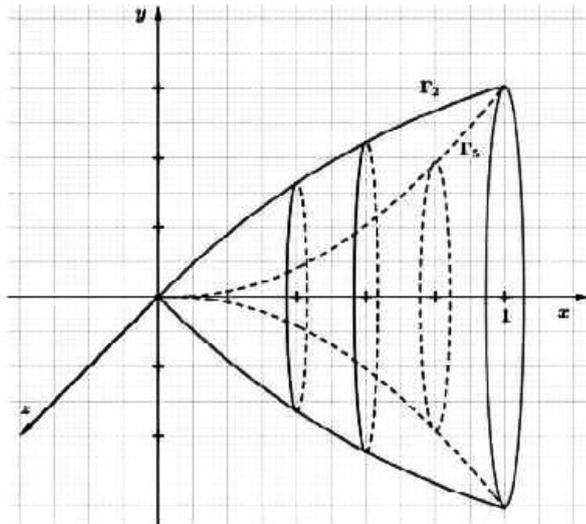
- a. Construire les deux points A et B de la courbe  $C_g$  de  $g$  d'abscisse respectives 1 et 4 .  
b. Tracer la courbe  $C_g$ .

II / Soit  $n$  un entier naturel non nul et la fonction  $f_n$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \sqrt{x^n} e^{-\frac{x}{2}}$

On désigne par  $\Gamma_n$  la courbe représentative de  $f_n$  et par  $S_n$  le solide de révolution obtenu par la rotation de  $\Gamma_n$  autour de l'axe  $(O, \vec{i})$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  on désigne par  $V_n$  le volume du solide  $S_n$ .



3. Pour tout entier  $n \geq 1$  on pose  $U_n = \frac{V_n}{n!}$
- a. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $U_{n+1} = \frac{-\pi}{e(n+1)!} + U_n$ .
- b. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $V_n = \pi n! \left( 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{p^k} \right)$ .
- Déterminer alors la limite de la suite  $t$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $t_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{p^k}$ .



- c. Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides  $S_1$  et  $S_5$ .  
(figure ci-contre)

**Exercice 3 : 4 points**

Dans le plans orienté, on considère un triangle OBC tel que :  $OB = 2OC$  et  $(\vec{OB}, \vec{OC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

- Soit  $S$  la similitude directe de centre  $O$  et telle que  $S(B)=C$ . Caractériser  $S$ .
  - Soit  $A$  le point tel que le triangle  $ABC$  équilatéral de sens direct.
- On désigne par  $\Gamma$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et par  $\Omega$  le centre de  $\Gamma$
- Soit  $R$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $h$  l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $\frac{1}{2}$

On pose  $S'=Roh$ .

- Montrer que  $S'$  est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
  - Déterminer  $S'(B)$ .
  - On désigne par  $\omega$  le centre de  $S'$ . Montrer que  $\omega \in \Gamma$  et que  $\Omega$  le milieu du segment  $[\omega B]$ .
3. On pose  $\sigma = S' \circ S_{(\Omega B)}$ .
- Montrer que  $\sigma$  est une similitude indirecte. Préciser son rapport et son centre.
  - Déterminer  $\sigma(B)$ .
  - On pose  $\Delta$  l'axe de  $\sigma$ . Montrer que  $S\Delta(\Omega) = C$ .
4. On pose  $\varphi = \sigma \circ S^{-1}$ . Déterminer la nature de  $\varphi$

**Exercice 4 : 4 points**

L'espace est rapporté à un repère O.N. direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient les points  $A(1,0,2)$ ;  $B(0,1,3)$ .  
On désigne par  $h_1 = h_{(A,2)}$ ,  $h_2 = h_{(B,3)}$  et  $f$  l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point  $M$

associe le point  $M'$  tel que  $\begin{cases} \overline{MM'} = 2 \overline{M_1 M_2} \\ h_1(M) = M_1 \\ h_2(M) = M_2 \end{cases}$

- 1.a. Montrer que pour tout point  $M$  d'image  $M'$  par  $f$  on a :  $\overline{MM'} = 2(\overline{MA} - 2\overline{MB})$
- b. Montrer que les expressions analytiques de  $f$  sont :  $\begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y - 4 \\ 3z - 8 \end{cases}$  puis caractériser  $f$ .

2. Soit  $S$  la sphère de centre  $\Omega(\frac{-1}{3}, 2, \frac{7}{3})$  et de rayon 1 et  $S' : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$   
Montrer qu'il existe une seule homothétie  $h$  de rapport  $k > 0$  tel que  $h(S) = S'$  puis déterminer son centre  $I$ .
3. Soit  $P_m : x - y + z + m - 1 = 0 ; m \in \mathbb{R}$ .
- a. Etudier suivant les valeurs de  $m$ ,  $S \cap P_m$ .
- b. Montrer que  $S \cap P_0$  est un cercle  $\zeta$  dont on déterminera le centre et le rayon.
4. a. Déterminer  $P'_0 = f(P_0)$ .
- b. Montrer que  $f(\zeta)$  est un cercle  $\zeta'$  que l'on caractérisera et en déduire :  $S' \cap P'_0$ .

**Exercice 5 : 4.5 points**

Une usine est spécialisée dans la fabrication des pneus à vélos

**Partie A/**

Le service de qualité de l'usine a montré que chaque pneu produit par l'usine pouvait présenter deux types de défaut : un défaut  $d_1$  avec une probabilité égale à 0,02 et un défaut  $d_2$  avec une probabilité égale à 0,05. Le contrôle a montré aussi que les défauts étaient indépendants. Un pneu est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts. Tous les résultats seront arrondis à 0,0001 près

Un pneu est tiré au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : « Le pneu tiré présente le défaut  $d_1$  ».  
B : « Le pneu tiré présente le défaut  $d_2$  ».  
D : « Le pneu tiré présente au moins l'un des deux défauts ».

1) a) Déterminer  $p(A \cap B)$ .

b) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,069.

2) Pour l'entretien d'un pneu le réparateur propose la tarification suivante :

La réparation d'un pneu qui présente le défaut  $d_1$  coûte 2 dinars

La réparation d'un pneu qui présente le défaut  $d_2$  coûte 4 dinars

L'entretien d'un pneu qui ne présente aucun défaut est gratuit

On désigne par  $X$  le coût en dinars de l'entretien d'un pneu .

a) Montrer que  $p(X = 4) = 0.049$ .

b) Définir la loi de probabilité de  $X$ .

c) Calculer le coût moyen de l'entretien d'un pneu

3) On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui donne la distance (en kilomètres) parcourus par un pneu , sans crevaison , on admet que  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  .

a) Calculer  $\lambda$  pour que la probabilité qu'un pneu parcoure entre 500km et 1000 km soit 0,25.

Pour la suite de l'exercice on prendra :  $\lambda = \frac{1}{500} \ln(2) \approx 0.0014$

b) Calculer la probabilité pour qu'un pneu parcoure sans crevaison plus que 2000km sachant qu'il a parcouru sans crevaison plus que 1000 km.

c) Un lot de 10000 pneus achetés par un client ( On considère que le nombre de pneus fabriqués est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.) Donner le nombre moyen de pneus dont la distance à parcourir sans crevaison dépasse 1000 km.

**Partie B/**

Depuis son ouverture en 2012 le service après-vente de l'usine a noté le nombre de réclamations (pneus ayant au moins l'un des deux défauts) par année de fabrication

	2012	2013	2014	2015	2016	2017
$X_i$	1	2	3	4	5	6
$Y_i$	72	45	34	23	15	9

$X_i$  = Rang de l'année

$Y_i$  = Nombre en milliers de pneus ayant au moins l'un des deux défauts

- 1) a) Sans calcul donner en justifiant le signe de Covariance de  $(X, Y)$ .  
b) Un ajustement linéaire entre  $X$  et  $Y$  est-elle justifié?

- 2) Pour chacune des valeurs de  $X_i$ , On pose  $Z_i = \ln(y_i)$

	2012	2013	2014	2015	2016	2017
$X_i$	1	2	3	4	5	6
$Z_i$	4.28	3.81	3.53	3.13	2.71	2.20

- a) Un ajustement linéaire entre  $X$  et  $Z$  est-elle justifié?  
b) Donner une équation de la droite de régression de  $Z$  en  $X$ .

3) Donner à l'unité près la meilleure estimation du nombre de pneus ayant seulement le défaut  $d_1$  et le nombre de pneus ayant seulement le défaut  $d_2$  et le nombre de pneus ayant les deux défauts dans la production de l'usine durant l'année 2020.