Série de révision n°: 2

Mathématiques | 2020 - 2021. | Niveau : Bac Math

Dhiaf Hammadi

Exercice 1: (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\langle O, \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
On note A et B les points d'affixes respectives 1 et 6 + i.
Pour tout point M de coordonnées (x, y), on note M' l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et de coordonnées (x', y')

1)a) Justifier l'existence de deux nombres complexes a et b tels que, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point M' est donnée par : z' = a$\overline{z}$ + b.

b) Montrer que $\begin{cases} a+b=1 \\ (6-i)a+b=6+i \end{cases}$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe z : z' $= \dfrac{12+5i}{13}\,\overline{z} + \dfrac{1-5i}{13}$.

d) Etablir que, pour tout point M(x, y), les coordonnées (x', y') de M' sont telles que
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}\,(12x+5y+1) \\ \\ y' = \dfrac{1}{13}\,(5x-12y-5) \end{cases}$$

2) On désigne par E l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que le point M' associé appartienne à l'axe des abscisses.

a) Justifier que M(x, y) appartient à E si et seulement si 5x - 12y = 5.

b) Déterminer l'ensemble E.

3) Dans cette question, on suppose que les coordonnées de M sont des entiers relatifs et que l'abscisse de M' est un entier relatif.

a) Montrer que x$\equiv 5u + 1\,[13]$.

b) En déduire que 5x - 12y - 5 $\equiv 0\,[13]$ et que l'ordonnée de M' est un entier relatif.

4) Déterminer les points M de la droite d'équation x = 2 tels que les coordonnées du point M' soient des entiers relatifs.

Exercice 2: (4 points)

On considère, dans IN*xIN*, l'équation (E) : $x^2(x^2+7) = y(2x+y)$
1) Soit (x, y) une solution de (E) et d = pgcd(x, y). On pose $x = ad$ et $y = bd$.

a) Vérifier que $a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)$

b) Montrer que a² ...

c) En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que :
$2a + b = k.a^2$ et $d^2.a^2 + 7 = kb$

d) Montrer que a = 1 et $(b+1)^2 = d^2 + 8$.

2) Résoudre l'équation (E)

Exercice 3: (10 points)

A) Soit m un réel non nul et f_m la fonction définie par :
$f_m(x) = mx\ln|x| - x$ si $x \neq 0$ et $f_m(0) = 0$.
(C_m) la courbe de f_m dans un repère ortonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_m en 0.

b) Montrer que f_m est impaire et étudier, suivant les valeurs de m, les variations de f_m.

2) Soit g la fonction définie sur IR+$\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{-x}{1 + lnx} \; si \; x > 0 \; et \; x \neq \dfrac{1}{e} \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite en 0.

b) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (Γ).

B) Dans cette partie, on prend m = 1 et on note f la restriction de f_1 à IR+ et (C) sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé R' = $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1)a) Tracer (C).

b) Montrer que la restriction φ de f à l'intervalle $[0, 1]$ est une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J à déterminer.

c) Quel est l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1}.

d) Tracer, dans R', les courbes C_φ et $C_{\varphi^{-1}}$ repectivement de φ et φ^{-1}.

2) Pour tout réel a de $]0, 1]$, on note I(a) = $\int_a^1 -x - \varphi(x)dx$.

a) Calculer I(a).

b) Soit ψ la fonction définie sur [0, 1] par : ψ(x) = $\int_x^1 -x - \varphi(x)dx$.
Montrer que ψ est continue sur [0, 1] puis déterminer $\psi(0)$.

c) En déduire le calcul de l'aire A du domaine du plan limité par :
C_φ et $C_{\varphi^{-1}}$ et la droite D d'équation y = - x.

3) Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = e \\ U_n > 0 \; et \; U_{n-1}f'(U_n) = f(U_{n-1}) \; pour \; n \geq 1. \end{cases}$

où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Calculer U_n en fonction de n

b) Pour tout entier naturel k , on note M_k et M_{k+1} les points de la courbe (C) d'abscisses respectives U_k et U_{k+1} et S_k l'aire du triangle $\Omega M_k M_{k+1}$.
Montrer que $S_k = \frac{1}{2} \left| U_{k+1} f(U_k) - U_k f(U_{k+1}) \right|$ et calculer S_k en fonction de k.

c) On considère la suite (T_n) définie sur IN* par : $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k$.
Calculer $\lim_{n \to +\infty} T_n$.