Série de révision n° : 4

Mathématiques | 2020 - 2021. | Niveau : Bac Math

Dhiaf Hammadi

Exercice 1: (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Dans le plan orienté, on donne un carré direct ABCD de centre O et I le milieu de [AB].

1. L'isométrie $S_{(BC)} o S_{(BC)} o t_{\overrightarrow{BD}}$ est une :
   a) Translation b) symétrie centrale c) symétrie glissante.
2. L'isométrie $t_{\overrightarrow{BD}}$ o $S_{(BC)}$ est égale à :
   a) $t_{\overrightarrow{CD}}$ o $S_{(OI)}$ b) $t_{\overrightarrow{BC}}$ o $S_{(OI)}$ c) $S_{(BC)}$.
3. L'isométrie $R_{(O,-\frac{\pi}{2})}$ o $R_{(C,\frac{\pi}{2})}$ est égale à :
   a) $t_{\overrightarrow{DA}}$ b) $t_{\overrightarrow{CO}}$ c) S_J , J = O * C.
4. L'isométrie $R_{(C,-\frac{\pi}{2})}$ o $S_{(AC)}$ o $R_{(O,\frac{\pi}{2})}$ est égale à :
   a) La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$
   b) la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [CD]
   c) la symétrie glissante vecteur $\overrightarrow{BO}$ et d'axe la parallèle à (BD) passant par K = C * D.

Exercice 2: (5 points)

Les résultats seront donnés à 10^{-3} prés.
Une entreprise fabrique des liseuses, (une liseuse est un appareil mobile conçu principalement pour lire des livres numériques), dont 4 % sont défectueuses.
Chaque liseuse est soumise à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98% des liseuses défectueuses et 3% des correctes.
On note les évènements suivants :
D = « la liseuse est défectueuse » , R = « la liseuse est rejetée par l'unité de contrôle ».
1) Traduire en termes de probabilité chacune des trois données numériques de l'énoncé.

2)a) Calculer la probabilité pour que la liseuse soit défectueuse et ne soit pas rejetée.

b) Quelle est la probabilité d'une liseuse rejetée soit défectueuse ?

c) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque la liseuse est rejetée alors qu'elle n'est pas défectueuse (« faux rejet ») ou qu'elle n'est pas rejetée alors qu'elle est défectueuse (fausse acceptation). Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3) Montrer que la probabilité qu'une liseuse ne soit pas rejetée est égale à 0,932.
4) Quatre contrôles successifs sont maintenant réalisés de manière indépendante pour savoir si une liseuse peut être commercialisée.
Une liseuse est :
• Commercialisée avec le logo de l'entreprise si elle subit avec succès les quatre contrôles successifs.
• Détruite si elle est rejetée au moins deux fois.
• Commercialisé sans le logo sinon.
Le coût de fabrication d'une liseuse est de 160 dinars. Son prix de vente est de 300 dinars pour une liseuse avec logo, 200 dinars sans logo.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque liseuse fabriquée, associe le gain algébrique (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

b) Déterminer p($X \geq 0$).

c) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire.

d) Représenter la fonction de répartition F de X.

Exercice 3: (5 points)

Soient a et b deux entiers naturels tels que : b < a et et n = ab ($a^{30} - b^{30}$).
1) Soit p un nombre premier tel que p − 1 divise 30.

a) Montrer que p divise n.

b) Déterminer les valeurs possibles de p.

c) En déduire que 14322 divise n.

2) On suppose que les entiers a et b vérifient le système suivant $\begin{cases} a^9 + b^9 = 1953637 \\ a^{13} + b^{13} = 1220694933 \end{cases}$

a) Prouver que a < 10.

b) Montrer que pour tout entier naturel x, on a : $x^9 \equiv x \pmod 5$ et $x^{13} \equiv x \pmod 5$.

c) En déduire que si (a, b) vérifie S alors $\begin{cases} a + b \equiv 2 (mod 5) \\ a - b \equiv 3 (mod 5) \end{cases}$. Déterminer alors a et b.

d) Montrer que n est divisible par 71610.

Dhiaf Hammadi

Exercice 4: (7 points)

A) Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie par : $f_n(x) = (1-x)^n\ e^{\frac{x}{2}}$.
(C_n) la courbe de f_n dans un repère ortonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)^n e^{\frac{x}{2}} = 0$.

2) Etudier et représenter f_1 pour n = 1.

3) On suppose n ≥ 2.

a) Dresser, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

b) Étudier les positions relatives de (C_1) et (C_2) puis tracer, dans le même repère, la courbe (C_2).

B) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $G_n(x) = F_n(1-2x)$ où F_n est la primitive sur IR de la fonction f_n telle que $F_n(0) = 0$.

1)a) Montrer que G_n est dérivable sur IR et que $\forall$ x ∈ IR, $G_n\,'(x) = -\ 2\ f_n(1-2x)$

b) Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de G_n.

2) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide d'une intégrale.

3) Dans cette question on suppose que n est impair et que x est négatif ou nul.

a) Montrer que pour tout réel t∈ $[1, 1-2x]$, on a : $(\ 1-t\ )^n\ \sqrt{e^t} \leq (\ 1-t\ )^{\ n}\ \sqrt{e}$.

b) En déduire que $\forall x \in\ ]-\infty, 0]$, $G_n(x) \leq G_n(1) - 2^{n+1}\ \sqrt{e}\ \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x)$.

C) Dans cette partie on admet que $G_n(x)$ admet une limite finie L_n lorsque x tend vers $+\infty$ et on pose $V_n = \dfrac{L_n}{2^n n!}$

1)a) A' l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$\forall x \in$ IR, $G_{n+1}(x) = 2^{n+2}x^{n+1}\ e^{\frac{1-2x}{2}} + 2(\ n+1)G_n(x)$ - 2

b) En déduire que ∀n∈IN*, $L_{n+1} = -\ 2 + 2(n+1)\ L_n$.

2) Calculer $G_1(x)$ en déduire que $L_1 = -\ 6$.

3) On pose $U_n = \dfrac{G_n(0)}{2^n n!}$

a) Montrer que ∀n∈IN*, $U_{n+1} = \dfrac{-2}{2^{n+1}(n+1)!} + U_n$.

b) Vérifier que $U_1 = 2\sqrt{e} - 3$. En déduire que ∀n∈IN*, $U_n = V_n + 2\sqrt{e}$

c) Montrer que ∀t∈ $[0, 1]$, $0 \leq f_n(t) \leq 1$.
En déduire que ∀n∈IN*, $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2^n.n!}$. Déterminer la limite de (V_n).