EXERCICE 1

Soit, dans, $Z\times Z$, l'équation (E): $35x - 96y = 1$.

1) Vérifier que le couple (11,4) est une solution particulière de (E).

2) Résoudre dans $Z\times Z$ l'équation (E).

3) Soit, dans IN, l'équation (E'): $x^{35} \equiv 2$ [mod97] et soit x une solution de (E').

a) Montrer que 97 est premier et que $x \wedge 97 = 1$

b) Montrer que $x^{96} \equiv 1$ [mod97]

c) Déduire que : $x \equiv 2^{11}$ [mod97]

d) Montrer que si $x \equiv 2^{11}$ [mod97] alors x est une solution de (E').

e) Montrer que l'ensemble des solutions de (E') sont de la forme $11+97k$ où $k \in$ IN.

EXERCICE 2

1) On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$; où x et y sont des entiers relatifs .

a)Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) : $7^n - 3\times 2^m = 1$

2) On suppose que $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

3) On suppose maintenant que $m \geq 5$.

a) Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$(modulo 32).

b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7,

Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c) En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$(modulo 5).

d) Pour $m \geq 5$ existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant

La relation (F)? Justifier

e) Déterminer alors l'ensemble des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls

Vérifiant la relation (F).

EXERCICE 3

On désigne par A l'ensemble des entiers naturels inferieures ou égales à 2010.

1- a) En utilisant le fait que 2011 est un nombre premier, montrer que l'équation (E): $67x + 2011y = 1$ admet des solutions dans $Z\times Z$.

b) Vérifier que le couple (-30,1) est une solution particulière de (E).

c) Résoudre (E).

d) Déduire la valeur de l'entier naturel x inférieur ou égal à 2010 vérifiant $67x \equiv 1[2011]$.

2- a) Soit a un entier, montrer $a^2 \equiv 1[2011]$ si et seulement si $a \equiv 1[2011]$ ou $a \equiv -1[2011]$.

b) En déduire que 1 et 2010 sont les seuls entiers de A qui sont égaux à leurs inverses.

3- Montrer alors que $2010! \equiv 2010[2011]$.

Révision Arithmétiques

Ex1)

(E) : $35x - 96y = 1$

1) $35 \times 11 - 96 \times 4$

$= 385 - 384$

$= 1$

donc $(11, 4)$ solution de (E)

2) On pose (x, y) " " " .

On a $35x - 96y = 35 \times 11 - 96 \times 4$

ssi $35(x-11) = 96(y-4)$.

$96 \mid 96(y-4)$

sig $96 \mid 35(x-11)$

~~donc~~

or $\left.\begin{array}{l} 96 = 2^5 \times 3 \\ 35 = 7 \times 5 \end{array}\right\} 96 \wedge 35 = 1$

Donc $96 \mid (x-11)$

D'où $x - 11 = 96k$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = 96k + 11$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation s'écrit :

$35(\cancel{9}6k + \cancel{11} - \cancel{11}) = \cancel{9}6(y-4)$

sig $35k + 4 = y$, $k \in \mathbb{Z}$.

donc $\begin{cases} x = 96k + 11 \\ y = 35k + 4 \end{cases}$

Réciproquement, Si $\begin{cases} x = 96k + 11 \\ y = 35k + 4 \end{cases}$

alors $35x - 96y$

$= 35 \times 96k + 35 \times 11 - 96 \times 35k - 96 \times 4$

$= 385 - 384$

$= 1$.

$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(96k + 11, 35k + 4) ; k \in$

3) (E') : $x^{35} \equiv 2 \pmod{97}$.

et x solution de (E')

~~donc $x = 96k + 11$, $k \in \mathbb{Z}$.~~

a/ $\sqrt{97} = 9,848$.

97 n'est ~~pas~~ divisible par au[cun] nombre premier inférieur à sa rac[ine] carrée : $\{2, 3, 5, 7\}$

Donc 97 est premier.

Supp que $d = 9$[7]
Si $97 \mid x$
alors $97 \mid x$
absurde.
donc

~~pour $k = 0$, $x = 11$ qui est premier~~
~~$11 \wedge 97 = 1$.~~

~~pour $k = 1$, $x = 107 > 97$~~

On pose $d = x \wedge 97$.

On a $\left.\begin{array}{l} 97 \text{ est premier} \\ \text{et } d \mid 97 \end{array}\right\} d \in \{1, 97\}$

or $\left.\begin{array}{l} d \mid x^{35} \\ \text{et } d \mid 97 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d \mid 2 \\ \text{donc } d \in \{1, 2\}. \end{array}$

D'où $\{d\} \in \{1, 2\} \cap \{1, 97\}$

$\boxed{d = 1}$

sig $x \wedge 97 = 1$

b/ 97 est un nombre premier qui ne di[vise] pas x.

D'après le petit théorème de Fermat

$x^{97-1} \equiv 1 \pmod{97}$

sig $x^{96} \equiv 1 \pmod{97}$.

c/ On a $x^{96} \equiv 1 \pmod{97}$

donc $x^{96 \times 4} \equiv 1 \pmod{97}$

" $x^{384} \equiv 1 \pmod{97}$

" $x^{385} \equiv x \pmod{97}$

$x^{35} \equiv 2 \pmod{97}$

On a donc $\begin{cases} x^{385} \equiv 2^{11} \pmod{97} \\ x^{385} \equiv x \pmod{97} \end{cases}$

d'où $\boxed{x \equiv 2^{11} \pmod{97}}$

d/ Si $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$

alors $x^{35} \equiv 2^{11\times 35} \pmod{97}$

" $x^{35} \equiv 2^{385} \pmod{97}$.

Or 97 est un nombre premier qui ne divise pas 2 (2 premier).

d'après le petit théorème de Fermat

$2^{96} \equiv 1 \pmod{97}$

donc $2^{96\times 4} \equiv 1^4 \pmod{97}$

" $2^{384} \equiv 1 \pmod{97}$

" $2^{385} \equiv 2 \pmod{97}$

On a donc : $\begin{cases} x^{35} \equiv 2^{385} \pmod{97} \\ 2^{385} \equiv 2 \pmod{97} \end{cases}$

donc $x^{35} \equiv 2 \pmod{97}$

" x solution de (E').

e) On a

$\begin{cases} x \text{ solution de (E') alors } x \equiv 2^{11} \pmod{97} \\ x \equiv 2^{11} \pmod{97} \text{ alors } x \text{ solution de (E')} \end{cases}$

Conclusion : $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$

SSi

x solution de (E')

→ Les solutions de (E') sont les entiers naturels x / $x \equiv 2^{11} \pmod{97}$

~~$x \equiv 2^{11} \pmod{97}$~~

$2^{11} = 2048$

$= 21 \times 97 + 11$

donc $2^{11} \equiv 11 \pmod{97}$

D'où $x \equiv 11$ (m...

$S = \{ 97k + ...$

Ex 2

1) (E) : $7x - 6y = 1$; $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a/ $7\times 1 - 6 \times 1 = 1$.

donc $(1, 1)$ solution particul... de (E).

b/ On pose (x, y) " de (E)

$7x - 6y = 7 - 6$.

donc $7(x-1) = 6(y-1)$.

Comme $6 \mid 6(y-1)$

alors $\left.\begin{matrix} 6 \mid 7(x-1) \\ 6 \wedge 7 = 1 \end{matrix}\right\} 6 \mid x - 1$.

donc $x = 6k + 1$, ~~$k \in \mathbb{Z}$~~ $k \geq 0$

L'équation s'écrit :

$7(6k + 1 - 1) = 6(y-1)$

$y = 7k + 1$; $k \in \mathbb{Z}$.

donc $\begin{cases} x = 6k + 1 \\ y = 7k + 1 \end{cases}$, ~~$k \in \mathbb{Z}$~~ k...

Réciproquement, Si $\begin{cases} x = 6k + 1 \\ y = 7k + 1 \end{cases}$, $k \in$ ...

alors $7x - 6y = 7\times 6k + 7 - 7\times 6k$...

$= 1$.

Donc (x, y) solution de (E)

$S_{\mathbb{N}^2} = \{ (6k+1 ; 7k+1) ; k \in \mathbb{N} \}$.

2) (F) : $7^n - 3 \times 2^m = 1$; $(n, m) \in \mathbb{N}$...

Si $m \leq 4$ donc $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

* Si $m = 1$, $7^n = 1 + 2\times 3$

$= 7$

donc $(1, 1)$ solution de (E).

* Si $m = 2$, $7^n = 1 + 4 \times 3$

$= 13$ impossible

* Si $m = 3$, $7^n = 1 + 8\times 3$

$= 25$ imp...

* Si $m = 4$; $7^n = 1 + 16$...

$= 49$...

a) On suppose $m \geq 5$.

Si (n, m) solution de (E)

alors $7^n - 2^m \times 3 = 1$

" $7^n = 1 + 2^m \times 3$

$= 1 + 2^5 \times 2^{m-5} \times 3$

$= 1 + 32 \times 2^{m-5} \times 3$

Comme $m \geq 5$

alors $m - 5 \geq 0$

" $2^{m-5} \times 3 \in \mathbb{Z}$.

D'où $7^n = 1 + 32 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

" $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.

b/

n	1	2	3	4
7^n	7	49	343	2401
$7^n \equiv \dots \pmod{32}$	7	17	23	1

Si $n \equiv 1 \pmod 4$ ssi $7^n \equiv 7 \pmod{32}$

Si $n \equiv 2 \pmod 4$ ssi $7^n \equiv 17 \pmod{32}$

Si $n \equiv 3 \pmod 4$ ssi $7^n \equiv 23 \pmod 4$

Si $n \equiv 0 \pmod 4$ ssi $7^n \equiv 1 \pmod 4$

Si (n, m) solution de (F)

alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$

" $n \equiv 0 \pmod 4$ ✓

" n est divisible par 4.

Si (n,m) vérifie F alors

c/ $4 | n$ donc $n = 4q$, $q \in \mathbb{N}$

Comme $7^4 = 2401$

$= 480 \times 5 + 1$

alors $7^4 \equiv 1 \pmod 5$

" $7^{4q} \equiv 1 \pmod 5$

" $7^n \equiv 1 \pmod 5$

d) Pour $m \geq 5$;

Si (n, m) solution de (E)

alors : $\begin{cases} 7^n \equiv 1 \pmod{32} \\ 7^n \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$

alors $\begin{cases} 7^n - 1 \equiv 0 \pmod{32} \\ 7^n - 1 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

or $5 \wedge 32 = 1$

donc $7^n - 1 \equiv 0 \pmod{5 \times 32}$

donc $7^n - 1 = 5 \times 32k$; $k \in \mathbb{Z}$

sig $3 \times 2^m = 5 \times 32k$

sig $3 \times 2^{m-5} = 5k$.

On a $5 | 5k$

donc $5 | 3 \times 2^{m-5}$ ①

or $\left.\begin{array}{l} 5 \wedge 3 = 1 \\ 5 \wedge 2^{m-5} = 1 \end{array}\right\}$ $5 \wedge (3 \times 2^{m-5})$

Donc $5 \nmid 3 \times 2^{m-5}$ ②

① et ② : Contradiction.

Donc il n'existe aucune solution $(n,$ de (E) pour $m \geq 5$.

e) $S_{\mathbb{N}^2} = \{(1,1) ; ~~(4,2)~~ (2,4)\}$.

Ex d) On a $7^n - 1 \equiv 0 \pmod 5$

$2^m \times 3 \equiv 0 \pmod 5$

donc $5 | 2^m \times 3$ or 5 premier

impossible

Donc il n'y a aucune soluti

Ex 3

$A = \{ n \in \mathbb{N} / n \leq 2010 \}$.

1) a/ 2011 est premier et $1 < 67 < 2011$ } donc $2011 \wedge 67$

D'après l'identité de Bezout,

l'équation (E) : $67x + 2011y = 1$.

admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b/ On a $67 \times (-30) + 2011 \times 1 =$

$-2010 + 2011 = 1$.

donc $(-30, 1)$ solution po

c/ Soit (x,y) solution de (E).

$$67x + 2011y = 67 \times (-30) + 2011$$

$$67(x+30) = 2011(1-y).$$

$2011 \mid 2011(1-y)$

sig $\left.\begin{array}{l} 2011 \mid 67(x+30) \\ \text{or } 2011 \wedge 67 = 1 \end{array}\right\} \; 2011 \mid x+30$

donc $x = 2011k - 30$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$67(\cancel{2011}k - \cancel{30+30}) = \cancel{2011}(1-y)$$

$$1 - y = 67k$$

$$y = 1 - 67k.$$

donc $\left\{\begin{array}{l} x = 2011k - 30 \\ y = 1 - 67k \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement, si $\left\{\begin{array}{l} x = 2011k - 30 \\ y = 1 - 67k \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

alors $67x + 2011y$

$= 67 \times 2011k - 67 \times 30 + 2011 - \cancel{2011 \times 67k}$

$= 1$

Donc (x,y) solution de (E).

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(2011k - 30 ; 1 - 67k), k \in \mathbb{Z}\}$$

d/ $x \in A$.

$67x \equiv 1 \; [2011]$

alors il existe $y \in \mathbb{Z}$ /

$$67x = 1 + 2011y$$

$$67x - 2011y = 1$$

donc $(x, -y)$ solution de (E)

donc $x = 2011k - 30$; $k \in \mathbb{Z}$.

or $x \in A$.

Donc $\boxed{x = 1981}$ (pour $k = 1$)

2) a/ Si $a \equiv 1 \pmod{2011}$ ou $a \equiv -1 \pmod{2011}$

alors $a^2 \equiv 1$ (…

Réciproquement, si $a^2 \equiv 1$ (mod 2…

alors $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2011}$.

donc $2011 \mid a^2 - 1$

$\left.\begin{array}{l} 2011 \mid (a-1)(a+1). \\ \text{or } 2011 \text{ est premier} \end{array}\right\}$ do… (ou

$2011 \mid a - 1$ ou $2011 \mid a + 1$

$a - 1 \equiv 0 \pmod{2011}$ ou $a + 1 \equiv 0$ (m…

$a \equiv 1 \pmod{2011}$ ou $a \equiv -1$ (mod 2…

Réciproque si $2011 \mid a-1$ ou $2011 \mid a+1$ don…

b/ Soit $a \in A$ égal à son inverse mod…

On a $a \times a \equiv 1 \pmod{2011}$

$$a^2 \equiv 1 \pmod{2011}$$

sig $a \equiv 1 \pmod{2011}$ ou $a \equiv -1$ (m…

~~donc~~ sig $\left\{\begin{array}{l} a = 1 + 2011k \; ; \; k \in \mathbb{Z} \\ a = -1 + 2011k' \; ; \; k' \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Comme $0 < a \leq 2010$

alors $a = 1$ ou $a = 2010$.

D'où 1 et 2010 sont les seuls entie… de A qui sont egaux à leurs inve…

3) pour tout $p \in \{2, 3, \dots, 2009\}$.

Soit $u(p)$ l'inverse de p mod 11. Car 2011 premier $\geq p$.

$u(p) \in \{2, 3, 4, \dots, 2009\}$.

D'où $p \times u(p) \equiv 1 \pmod{2011}$

Donc $2009! \equiv 1 \pmod{2011}$

$2010 \times 2009! \equiv 2010 \pmod{2011}$

$2010! \equiv 2010 \pmod{2011}$