Exercice 1

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(\sqrt{1+9x^2}+3x\right)$ et soit (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) + f(-x) = 0$, et en déduire la parité de f.

2) a) Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $f(x) = ln\, x + ln\left(3 + \sqrt{\frac{1}{x^2}+9}\right)$ en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu graphiquement.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ donner la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Donner une équation de la tangente T à (C_f) au point O.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions α et β et tel que $-2,8 < \alpha < -2,9$ et donner un encadrement de β.

b) En déduire la position relative de (C_f) et la droite $\Delta : y = x$.

c) Vérifier que $\sqrt{1+9\alpha^2} = e^\alpha - 3\alpha$.

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sue un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ courbe représentative de f^{-1}.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

6) On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\beta \le U_n \le 4$.

b) Etudier la monotonie de (U_n).

c) En déduire la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

7) *a*) Montrer que $\displaystyle\int_0^\alpha ln\left(\sqrt{1+9x^2}+3x\right)\, dx = \alpha^2 - \frac{1}{3} - \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{6}$

b) Soit $A(\alpha)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_f) ; $(C_{f^{-1}})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A(\alpha) = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha} - 2}{6} - \alpha^2$ *ua*.

Exercice 2

On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectifs z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que : (Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si :

$$\left(\frac{1+z}{z} \text{ est imaginaire pur}\right)$$

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que :

$$\frac{1+z}{z}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

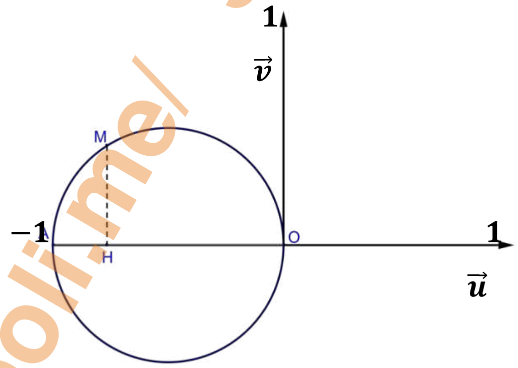
2) Dans la figure ci-dessous on a tracé le cercle (Γ). et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O,\vec{u})$.

On se propose de construire les points Net P.d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

b) Montrer que : $OH=OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.



Exercice 3

Un médecin est contacté dans son cabinet par ses patients et dispose d'un aide-soignant.

Quand le médecin est absent, le patient est systématiquement contacté par l'aide-soignant.

Quand le médecin est présent, il contacte ses patients trois fois sur quatre.

Le médecin est présent dans son cabinet quatre fois sur neuf.

Tout patient est contacté une seule fois soit par le médecin soit par l'aide-soignant.

Soient les événements suivant :

S « le patient est contacté par l'aide-soignant » et A « le médecin est absent ».

1) a) Modéliser la situation par un arbre pondérée.

b) Montrer que $p(S)=\frac{2}{3}$

2) Un patient est contacté par l'aide-soignant.

Déterminer la probabilité pour que le médecin soit présent dans son cabinet.

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

n patients contactes le cabinet l'un après l'autre de façon indépendante.

Soit p_n la probabilité pour que l'aide-soignant contacte au moins deux patient.

a) Montrer que $p_n=1-\frac{2n+1}{3^n}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 4

Soit f_n la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit (C_n) la courbe de f_n dans le repère orthogonal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 10$.

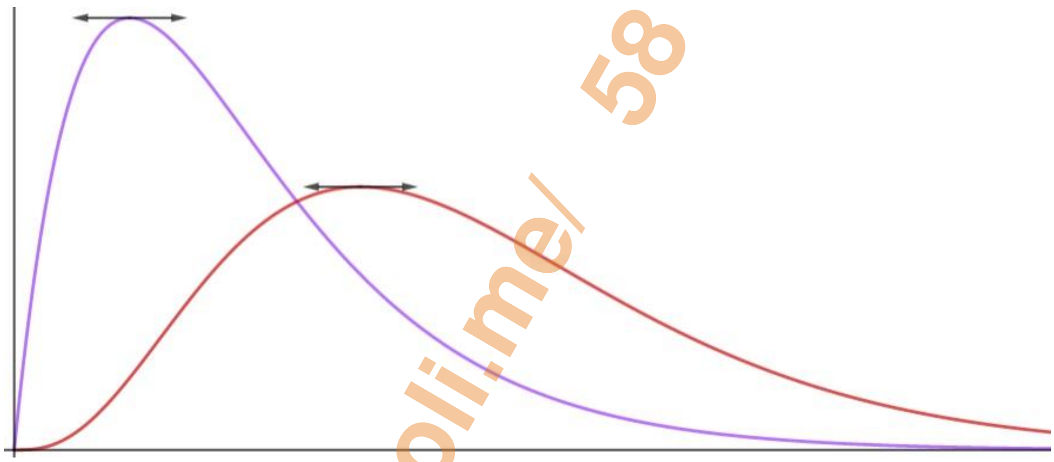
A)

1) a) Dresser le tableau de variation de f_1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, dresser le tableau de variation de f_n.

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les positions relatives de (C_{n+1}) et (C_n).

3) On a tracé ci-dessous les courbes (C_1) et (C_3).



a) Sans justification, graduer le repère puis nommer sur le graphique les deux courbes.

b) Tracer soigneusement la courbe (C_2) ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes.

B) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = f_n(n)$.

1) a) En utilisant les résultats de la partie A) démontrer que (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

2) a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,1]$, on a : $\frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{t}{2}$.

b) Déduire que pour tout $x \in [0\,,1]$, on a : $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}$.

c) Prouver alors que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

3) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{U_{k+1}}{U_k} \leq e^{-\frac{1}{4k}}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on a : $U_n \leq e^{-\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)}$

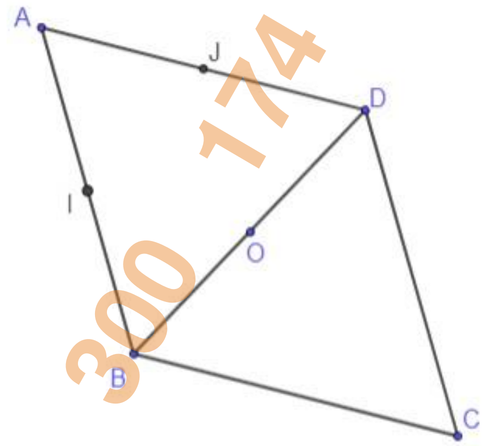
4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [k, k+1]$ on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a : $\int_1^n \frac{dt}{i} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

c) Montrer alors que pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ on a : $U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$.

d) Déterminer alors la limite de suite (U_n).

Exercice 5



Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre , I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[AD]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en B et B en D.

b) Caractériser f.

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A\,,B\,,D\}$ en l'ensemble $\{B\,,C\,,D\}$ et tel que $s(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment $[BD]$ par s.

b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD).

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A\,,B\,,D\}$ en l'ensemble $\{B\,,C\,,D\}$ et tel que $g(A) = D$.

a) Montrer que $g(D) = B$.

a) Caractériser g.

Exercice 6

On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) définies par :

$U_0 = 1$; $V_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \alpha U_n + (1-\alpha)V_n$ et $V_{n+1} = (1-\alpha)U_n + \alpha V_n$

où α est un réel donné tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

1) Soit (t_n), la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = V_n - U_n$.

a) Calculer t_0 et t_1 .

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_n = (2\alpha - 1)^n$.

c) En déduire la limite de t_n .

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n \leq V_n$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite .

d) Montrer que, , pour tout entier naturel n, $U_n + V_n = 3$.

e) En déduire la valeur de la limite .

Exercice 7

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $35u - 96v = 1$.

a) Vérifier que le couple $(11\,,4)$ est une solution de (E).

b) Résoudre alors l'équation (E).

2) On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation (F) : $x^{35} \equiv 2(mod\ 97)$.

Soit x une solution de (F).

a) Montrer que 97 est premier.

b) Montrer que $x^{96} \equiv 1(mod\ 97)$.

c) Montrer que $x \equiv 2^{11}(mod\ 97)$.

3) a) Montrer que si $x \equiv 2^{11}(mod\ 97)$ alors x est solution de l'équation (F).

b) Montrer que les solutions de (F) sont de la forme $x = 97k + 11$ avec $k \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 8</u>

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout réel , $0 < f(x) < 1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α telle que $0,5 < \alpha < 0,6$.

d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x. Interpréter le résultat graphiquement.

4) Dans la figure ci-dessous, on a construit la droite $y = x$ et on a placée le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe (C)

b) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

5) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$ est une primitive de f.

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A = \alpha + \ln\left(\frac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$.

II) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0\ ,+\infty[$ par $F_k(x) = \int_0^x \left(f(t)\right)^k\ dt$

1) a) Montrer que la function F_k est croissante sur $[0\ ,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout reel $t \in [0\ ,+\infty[$, $0 \le \left(f(t)\right)^k \le e^{-kt}$.

c) En déduire que pour tout $\in [0\ ,+\infty[$, $0 \le F_k(x) \le \frac{1}{k}$.

d) Montrer alors que la function F_k possède une limite finie I_k quand x tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} I_k = 0$.

2) a) En utilisant la question I.5.a) Montrer que $I_1 = -h(0)$.

b) Montrer que pour tout réel $t \in [0\,,+\infty[$, $\left(f(t)\right)^3 - f(t) = f'(t)$.

c) En déduire que pour tout ≥ 0 , $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

b) Montrer que $I_3 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

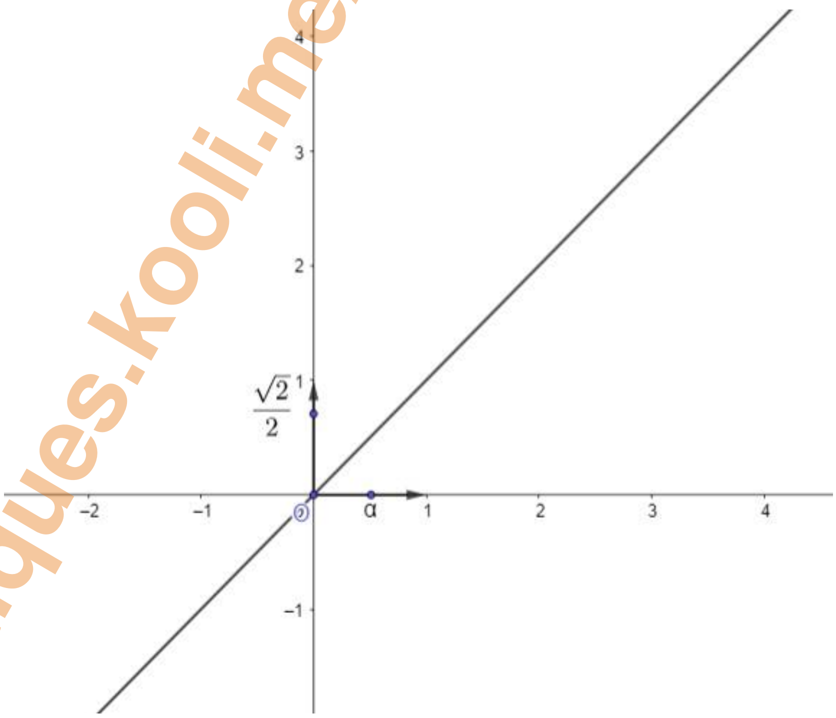
3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $k \geq 2$ on a:

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1}\left(\left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1}\right) ,k \geq 2$$

b) En déduire que $I_{2k+1} - I_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}}$ $k \geq 2$

c) Montrer que $I_{2k+1} = I_3 - \sum_{m=2}^{k} \frac{-1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$, $k \geq 2$

d) En déduire $\lim_{k\to} \sum_{m=2}^{k} \frac{-1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$



Exercice 9

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

Dans la figure ci-dessous, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectifs 1 , $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a + \overline{a}$.

a) Vérifier $R \in (O\,,\vec{u}\,)$. Construire R.

b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M le point d'affixe z non nul.

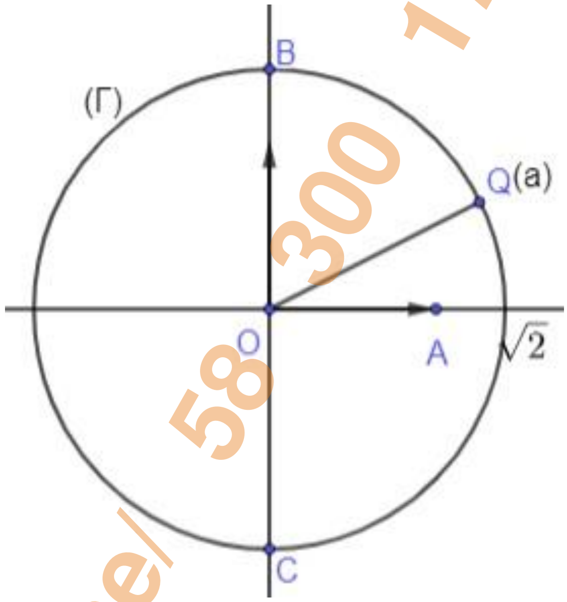
a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow (i\overline{a}+1)z+(ia-1)\overline{z}=i(a+\overline{a})$.

c) Montrer que $(AP)\perp(OM) \Leftrightarrow (i\overline{a}+1)z-(ia-1)\overline{z}=0$

d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.

Justifier que $Z_H=\frac{i(a+\overline{a})}{2(i\overline{a}+1)}$



Exercice 10

Une entreprise fabrique des pièce électroniques pour une marque de voitures. Une étude statistique a ptouvé que 6% des pièces fabriquées sont défectueuses.

L'unité de contrôle rejette 97% des pièces défectueuses et 2% des pièces non défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on la soumet à un test de contrôle .

On note D : « la piéce est défectueuse » et R : « la pièce est rejeté par l'unité de contrôle »

1) Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités

2) a) Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ne soit pas rejetée par l'unité de contrôle.

b) On dit qu'il y a erreur de contrôle lorsque une pièce défectueuse et acceptée ou une pièce non défectueuse et rejetée. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de contrôle.

3) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit acceptée est égale à $0,923$.

4) Pour la commercialisation de ses pièces, l'entreprise décide de faire passer chaque pièce à trois contrôles successifs mais indépendants :

* Si la pièce est acceptée par les trois contrôles, elle sera commercialisée avec le logo de la marque de voiture.

* Si la pièce est acceptée uniquement par deux contrôles, elle sera commercialisée sans le logo de la marque de voiture.

* Si elle est acceptée uniquement par un contrôle ou rejetée, elle sera détruite.

a) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit commercialisée sans le logo de la marque de voiture est $3\times(0,923)^2\times(0,077)$.

b) Déterminer la probabilité pour que la pièce soit détruite.

Exercice 11

A) Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 2(x-1) - \ln x$

1) a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux racines 1 et α et que $0,2 < \alpha < 0,25$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0\,,+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{x-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

c) Montrer que f est dérivable en 1 et donner une équation de la tangente T à C_f en $A(1\,,0)$.

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)\ln x}{(x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = f(x) - x + 1$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ on a : $\varphi'(x) = -\left(\frac{\ln x}{x-1} - 1\right)^2$.

b) Etudier les variations de φ. (Calculer $\varphi(1)$).

c) En déduire la position relative de T et C_f.

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$ par $h(x) = 4x^2 - 4x$.

a) Montrer que $f(\alpha) = h(\alpha)$.

b) Etudier le sens de variation de h et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

b) Tracer T et C_f (unité graphique cm).

B) Soit F la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$.

1) Montrer que $\forall t \in [1\,,+\infty[$, on a : $f(t) \geq \frac{4(\ln t)^2}{t}$, en déduire que $\forall t \in [1\,,+\infty[$, $F(x) \geq \frac{4}{3}(\ln x)^3$.

2) Dresser le tableau de variation de F.

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = F(n+1) - F(n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leq U_n \leq f(n+1)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$.

Exercice 12

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci- contre :

* ABC est un triangle isocèle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

* H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

* I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

* Δ est la médiatrice de [AC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie C en A et H en J.

b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe est le vecteur.

c) On désigne par D le symétrique du point H par rapport à J, montrer que $f(J) = D$

d) Montrer que l'image par f de la droite (AB) est la droite Δ.

e) La parallèle à la droite (AC) et passant par D coupe Δ en K, montrer que $f(I) = K$.

2) Soit l'application : $g = S_\Delta \circ f$.

a) Déterminer $g(H)$ et $g(C)$.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de g.

c) Montrer que le triangle CIK est équilatéral.

3) On pose $f(B) = P$.

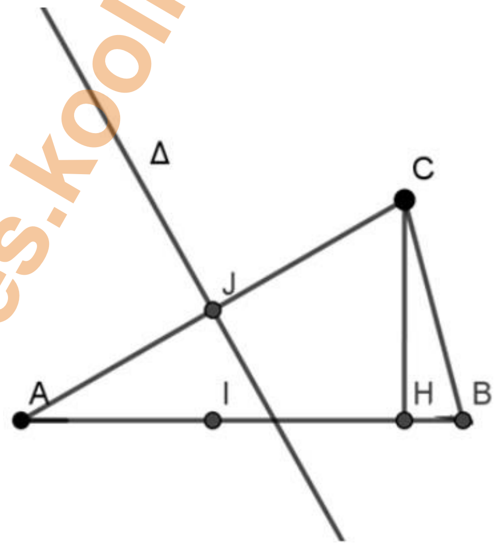
a) Montrer que $g(B) = P$.

b) En déduire que le point P est l'intersection de Δ et Δ' où Δ' est la bissectrice du segment $[BC]$.

4) Soit l'application $h = R_{\left(J, -\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{HJ}}$.

a) Déterminer $h(C)$ et montrer que $h = g$.

b) Soit L le milieu du segment $[AD]$, montrer que (HJ) est la médiatrice du segment $[KL]$.



__Exercice 13__

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2}{2U_n - 1}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 4$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soient les suites (V_n) et (W_n)définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - \frac{1}{U_n}$ et $W_n = \ln(V_n)$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n

b) En déduire que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $W_0 = -\ln 2$

c) Exprimer alors (W_n) en fonction de n

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

d) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 14

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2 \times 5^n + 7$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impaire.

b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 1(mod\ 8)$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1(mod\ 8) \\ x \equiv 7(mod\ 125) \end{cases}$ alors $x \equiv 257(mod\ 1000)$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257(mod\ 1000)$.

c) Quels sont les trois derniers chiffres de $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

b) Soit d le $PGCD$ de a_{2n} et a_{2n+1} . Montrer que d est différent de 7.

c) Trouver alors d.

Exercice 15

A) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respective $y = x$ et $y = -x$.

a) Construire les points A et B d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ'.

c) tracer la courbe (C_f).

3) Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ'.

Montrer que l'aire de de la partie S est égale à $\frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$.

B) Soit n un entier naturel.

On pose $U_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t\, dt$ et $V_n = \int_{\frac{1}{e}}^{e} t^n e^t f(t)\, dt$

1) a) Montrer que $U_n > 0$.

b) Montrer que $0 < U_n < \frac{e}{n+1}$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c) Montrer que $U_{n+1} = e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - (n+1)U_n$.

b) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)U_n = e$.

2) a) Montrer que $\frac{U_n}{e} \leq V_n \leq 0$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

b) Vérifier que pour tout $\in]0\,,+\infty[$, f(t)=tf'(t)-t .

Montrer alors que $V_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)\ dt - U_{n+1}$

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)V_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - V_{n+1} - U_{n+1}$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)V_n = 0$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel σ_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}\,,1\right]$ tel que $f(\sigma_n) = \frac{V_n}{U_n}$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{U_n} = 0$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$

<u>Exercice 16</u>

Soit θ un réel non nul.

Dans la figure ci-dessous :

* $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ est repère orthonormé direct.
* $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
* E est le point de $\mathcal{C}$ tel que $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OE}\right) \equiv \theta[2\pi]$.
* F et G sont les points d'affixes respectives : -1 et $+\sqrt{2}$.
* Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$.
* D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O\,,\ \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = ODe^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors A.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta}$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E).

Déterminer z_B.

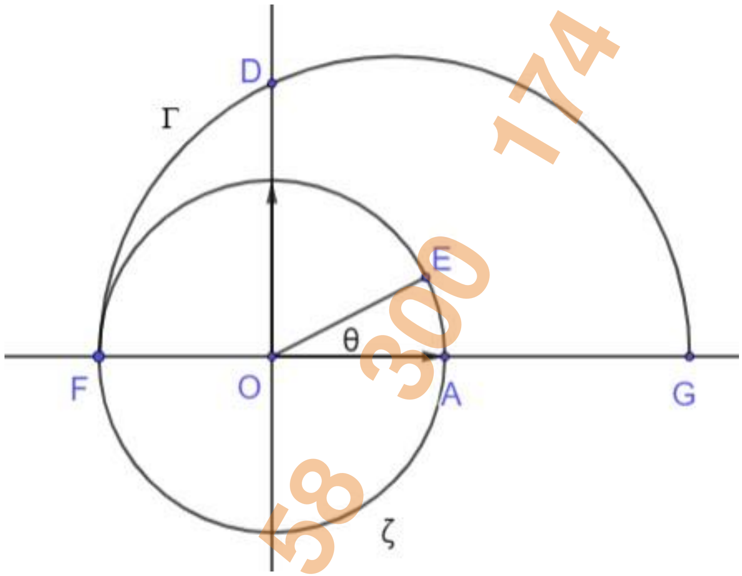
3) a) Montrer que les points , A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = ODe^{i\theta}$.

c) Montrer que $\frac{aff(\overrightarrow{AC})}{aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) Construire alors le point B.



Exercice 17

Une urne contient six pièces de monnaie :

*** Quatre sont équilibrées**

*** Les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « Face» est égale à $\frac{2}{3}$**

1) On tire au hasard une pièce de l'urne et non effectue un lancer de cette pièce.

On considère les événements suivants :

E **: « La pièce est équilibrée »**

F_1 **: « On obtient FACE lors du lancer de la pièce »**

2) a) Compléter l'arbre ci-contre

b) Montrer que $(F_1) = \frac{5}{9}$.

c) Sachant qu'on obtenu FACE pour la pièce lancée, calculer la probabilité qu'elle soit équilibrée.

3) On tire au hasard une pièce de l'urne et on effectue deux lancers successifs de cette pièce.

On désigne par X **la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la pièce a donné FACE.**

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

4) On tire au hasard une pièce de l'urne et on effectue n **lancers successifs de cette pièce,** $n \geq 1$.

On désigne par F_n **: « On obtient FACE pour les** n **lancers de la pièce ».**

Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$

5) On pose p_n **la probabilité d'avoir tiré la pièce équilibrée sachant qu'on obtenu FACE à chacun des** n **lancers.**

a) Montrer que $p_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n}$

b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $p_n \leq 0,01$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ et soit (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

c) Dresser le tableau de variation de .

d) En déduire que $e^x-1\leq\sqrt{e^x-1}$ si et seulement si, $x\leq ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(ln\,2,1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe Γ de la fonction $x\mapsto e^x-1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$, $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{g^{-1}(x)}{x}=1$.

6) On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x)=2[f(x)-(g^{-1}o\,f)(x)]$

a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ $F'(x)=G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$ $F(x)=G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x=0$ et $x=ln\,2$. Montrer que $A=1+ln\,2-\frac{\pi}{2}$

7) Soit n un entier naturel tel que $n\geq2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[ln\,n,+\infty[$ par $f_n(x)=\sqrt{e^x-n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[ln\,n,+\infty[$ par $G_n(x)=2\left[f_n(x)-\sqrt{n}g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right]$.

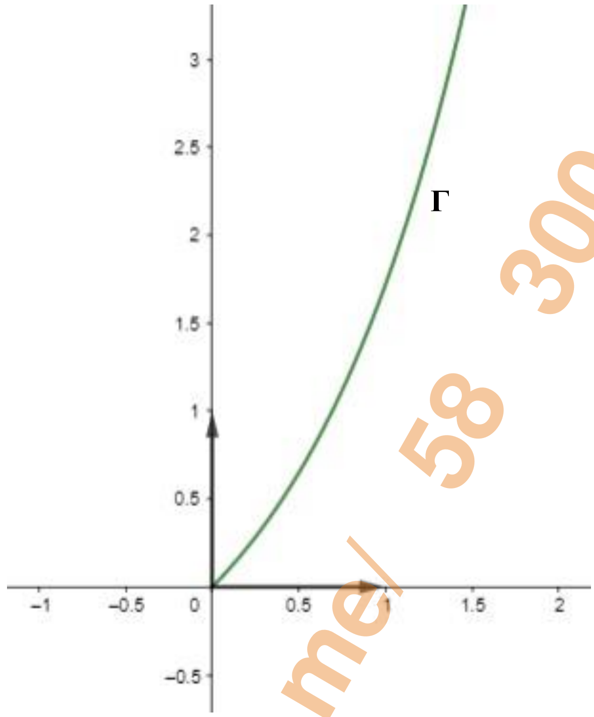
Montrer que pour tout $x\in[ln\,n,+\infty[$, $G_n(x)=\int_{ln\,n}^x f_n(t)\,dt$

b) Vérifier que pour tout $x\geq ln\,n$, $\sqrt{e^x-n}<\sqrt{e^x-1}$

En déduire que pour tout $x\geq ln\,n$, $f_n(x)\leq e^x-1$

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1$

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} A_n$



Exercice 19

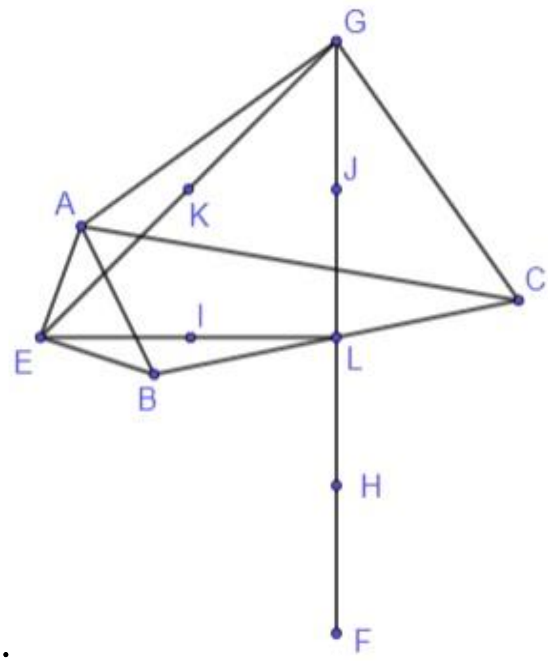
Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[GE]$, $[EL]$ et $[GL]$. F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L.

On note r_1 et r_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs G et E. S_L désigne la symétrie centrale de centre L.



1) a) Determiner $r_2 \, o \, S_L \, o \, r_1(A)$ puis caractériser $r_2 \, o \, S_L \, o \, r_1$.

b) En déduire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.

c) Justifier que le quadrilatère $LJKI$ est un carré.

2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ et d'axe Δ passant par I.

On pose $g = \varphi \, o \, S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE).

a) Montrer que $\Delta = (IH)$.

b) Montrer que $g(J) = I$ et $g(L) = E$.

c) Prouver que g est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en L et L en E.

a) Justifier que f est une symétrie glissante.

b) Donner les éléments caractéristiques de f.

4) Soit M un point du plan. Soient M' et M'' les images respectifs de M par f et g.

Montrer que M' et M'' son symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 20

1) Soit la suite géométrique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $U_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$

a) Calculer U_1.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

Montrer que $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

2) Montrer que pour tout réel x, $1 + x \leq e^x$.

3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = (1 + U_0)(1 + U_1) \times \dots \times (1 + U_n)$.

a) Calculer V_0 et V_1.

b) Montrer que la suite (V_n) est croissante.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_n \leq e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

d) Montrer que la suite (V_n) est convergente.

e) Soit L la limite de la suite (V_n).

Montrer que $1 < L \leq \sqrt{e}$.

Exercice 21

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$.

B) On se propose de déterminer l'ensemble A des triplets naturels non nuls $(m\,,n\,,q)$

tels que $2^{2n} + 3^{2n} = q^2$

1) Vérifier que $(2\,,1\,,5)$ est un triplet de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $(m\,,n\,,q)$ est un élément de A.

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0(mod\ 8)$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs.

b) Soit $d=(q-3^n)\wedge(q+3^n)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d=2$.

c) Montrer que $q-3^n=2$ et que $q+3^n=2^{2m-1}$.

En déduire que $q=2^{2m-2}+1$ et que $3^n=2^{2m-2}-1$

4) Déterminer n et q lorsque $m=2$.

5) On suppose que $m\geq 3$.

a) Montrer que $3^n\equiv -1(mod\ 16)$.

b) Déterminer , suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets $(m\,,n\,,q)$ élèments de l'ensemble A tels que $m\geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

Exercice 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

On considère la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1-e^{-x}}$.

1) a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur $[0\,,1[$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0\,,1[\,;\ g(x)=-ln\,(1-x^2)$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution α sur $[0,7\,;0,8]$.

d) On donne ci-dessous la représentation graphique (C) de la fonction f dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. la première bissectrice Δ et le point $A(\alpha\,,\alpha)$.

On désigne par (C') la courbe de g. Tracer (C') dans le même repère.

2) Soit φ la fonction définie sur $[0\,,1[$ par $\varphi(x)=\int_0^{g(x)} f(t)\ dt$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0\,,1[$ et que $'(x)=\frac{2x^2}{1-x^2}$.

b) Déterminer les réels , b et c tels que pour x appartenant $[0\,,1[\ \frac{2x^2}{1-x^2}=a+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{1-x}$

c) En déduire que $\varphi(x)=-2x+ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x\in[0\,,1[$.

d) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la région du plan située entre les courbes (C) et (C')et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

Montrer que $\mathscr{A}=2\left(\varphi(\alpha)-\frac{\alpha^2}{2}\right)$.

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k.3^k}$

Soit $n \geq 1$. On pose pour $t \in [0\,,1[$, $S_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1}$

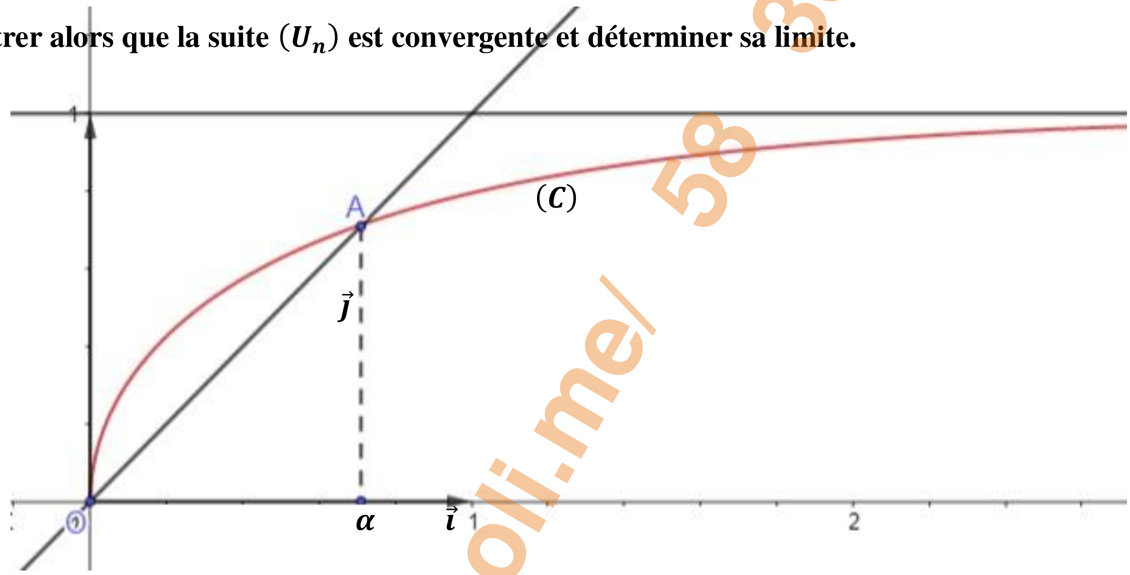
a) Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)\ dt = U_n$

b) Montrer que pour $t \in [0\,,1[$, , $S_n(t) = (1-t^{2n})g'(t)$, où g' est la dérivée de g sur $[0\,,1[$.

c) Montrer que pour $\leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$.

d) En déduire que $\left(1-\frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq U_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4) Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 23

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{53}.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x(mod\ 53)$.

2) Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2(mod\ 53)$, où $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3) Soit x une solution de (E_1).

a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{216} \equiv x(mod\ 53)$.

c) En déduire que $x \equiv 2^9(mod\ 53)$.

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35(mod\ 53)$.

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$.

a) Vérifier que $(3\,,4)$ est une solution de l'équation (E_2).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} x \equiv 34(mod\ 71) \\ x^{29} \equiv 2(mod\ 53) \end{cases}$