Lycée Pilote de Sfax A/S 2020-2021	Série de révision N°3	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ Math

1 Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

① Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) Soit Z un nombre complexe de module 1 et d'argument α tel que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Alors $\arg\left(Z^2+Z+1\right) \equiv \alpha\left[2\pi\right]$.

b) L'équation $\left(\overline{Z}\right)^3 = Z$ admet cinq solutions distinctes.

② Si un entier a est premier avec 37 alors pour tout entier naturel n, $a^{36n+1} \equiv a\left(\text{mod}\,37\right)$.

③ Soit a et b deux entiers.
Si $4a \equiv 25b\left(\text{mod}\,5\right)$ alors $a \equiv 0\left(\text{mod}\,5\right)$.

2 On se propose de déterminer les entiers naturels n et y solutions de l'équation $\left(F\right): 3^n = 8+y^2$.

① Déterminer selon n le reste modulo 8 de 3^n.

② Déterminer selon y, les restes modulo 8 de y^2.

③ Montrer que si n est une solution de $\left(F\right)$ alors n est pair.

④ Conclure.

3 ① On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right)$: $2Z^2-\left(3+i\right)Z+2=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right)$.

b) On note Z' et Z'' les solutions de l'équation $\left(E\right)$ tels que $\text{Im}\left(Z'\right)>0$.
Ecrire Z' et Z'' sous forme exponentielle.

c) Vérifier que $Z' \times Z'' = 1$ et $\left|\frac{\sqrt{3}+1}{2}Z' - \frac{2}{\sqrt{3}+1}Z''\right| = 2$.

② Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives -1, 1, $Z_1 = re^{i\theta}$ et $Z_2 = \frac{1}{Z_1}$

tels que $r \in \left[1,+\infty\right[$ et $\left|Z_1 - Z_2\right| = 2$, $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que $r-\frac{1}{r} = 2\cos\left(\theta\right)$.

b) Montrer alors que $BM_1 = \sqrt{2}$.

c) Montrer que les droites $\left(AM_1\right)$ et $\left(BM_2\right)$ sont parallèles.

d) Donner une construction géométrique du point M_2 connaissant le point M_1.

4 Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un triangle ABC tel que $AC = 2AB$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ et I le milieu de $\left[AC\right]$.

① a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en I et B en C.
b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre Ω.

② Soit $R = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $g = f \circ R^{-1}$.

a) Montrer $g\left(A\right) = I$ puis caractériser g.

b) En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$.

③ Soit $E = R(I)$ et F le point tel que AEFI est un carré.

a) Caractériser $f \circ f$.

b) Déterminer $f \circ f(A)$. En déduire que Ω est le milieu de $[AF]$.

④ Le cercle de centre C passant par Ω recoupe le cercle de diamètre $[BC]$ en M.

Soit N le symétrique de M par rapport à C. Montrer que $f(M) = N$.

$\boxed{5}$ I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

On désigne par C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f.

② Soit g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \ln(\tan x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ 2h'(x) = f(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II/ Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f^n(t)\, dt$

① a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_1(x)$.

b) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(t) = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{e^{t} + e^{-t}}$

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ k'(t) = f^2(t)$.

Déterminer alors $F_2(x)$ en fonction de x puis $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_2(x)$.

② a) Montrer que $\forall t \in [0, +\infty[,\ f(t) < 2e^{-t}$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$ est finie.

c) Vérifier que $\forall t \in [0, +\infty[,\ f(t) \geq e^{-t}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$ est non nulle.

③ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_n(x)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\ x \in [0, +\infty[,\ \displaystyle\int_0^x f^{n-1}(t) f'(t) k(t)\, dt = \frac{1}{n} k(x) f^n(x) - \frac{1}{n} \int_0^x f^{n+2}(t)\, dt$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in [0, +\infty[,\ f^{n-1}(t) f'(t) k(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\ x \in [0, +\infty[,\ (n+1) F_{n+2}(x) - n F_n(x) = k(x) f^n(x)$.

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} u_n$.

④ a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Déterminer en fonction de n, u_{2n+1} et u_{2n+2}.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$.

d) Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n-1)} \right)^2 \times \frac{2}{2n+1} \right] = \pi$.