Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°10 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

On donne dans le plan un carré $ABCD$ de centre O et de sens driect, répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) Les isométries $S_{(OC)} \circ S_{(AB)}$ et $S_{(AD)} \circ S_{(OA)}$ sont égale.

2) L'isométrie $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (BC).

3) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)}$ est une symétrie glissante.

4) L'isométrie $S_{(AB)} \circ S_O \circ S_{(BC)}$ est une rotation.

Exercice 2 :

ABC est un triangle equilatéral de sens direct et de centre G. Soient I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et D la perpendiculaire à (AB) en A. Soit $r = r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $r' = r_{\left(G,\frac{2\pi}{3}\right)}$.

(BC) coupe D en un point E.

1) Déterminer les droites Δ et Δ' tel que $r = S_{\Delta} \circ S_{(GC)}$ et $r' = S_{(GC)} \circ S_{\Delta'}$.

Caracteriser alors l'isométrie $r \circ r'$.

2) Soit $f = S_D \circ S_{(BC)}$ et $g = f \circ r$. Caractériser f puis montrer que g est une translation dont on précisera le vecteur.

3) On pose $h = r^{-1} \circ f \circ r$. Soit M un point du plan, $M_1 = h^{-1}(M)$ et $M_2 = r(M)$.

Montrer que le quadrilatère ABM_1M_2 est un parallelogramme.

Exercice 3 :

$OABC$ est un carré de sens direct et de centre Ω. Soit I et J les milieux respectifs de $[OA]$ et $[OC]$.

1)a) Caractériser l'isométrie $f = S_{(AC)} \circ S_{(\Omega J)}$.

b) On pose $t = S_{(AC)} \circ S_{(IJ)}$. Montrer que t est une translation et préciser son vecteur.

c) Vérifier que $f = S_{(\Omega I)} \circ S_{(AC)}$. En déduire que $f \circ t$ est une rotation dont on précisera le centre et l'ang

2) Soit $g = f \circ S_{(OI)}$. Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

3)a) Caractériser $g^{-1} \circ f$. En déduire l'ensemble Δ des points M tel que $f(M) = g(M)$.

b) En déduire de ce qui précéde l'image de A par g.

4) Le plan complexe est rapporté au repére orthonormé directe $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soit $M(z)$ un point du plan et $M'(z') = g(M)$. Montrer que $z' = -i\bar{z} + 2i$.

Exercice 4 :

ABC est un traingle rectangle et isocéle en A, de sens direct.

Soit I le milieu de $[BC]$, la paralléle à (AI) passant par C coupe (AB) en D.

1)a) Caractériser l'isométrie $f = S_{(AB)} \circ S_{(AI)}$.

b) Déterminer la droite Δ *tel que* $S_{\Delta}\circ S_{(CD)}=t_{\overrightarrow{CB}}$. *Caractériser alors* $f\circ t_{\overrightarrow{CB}}$.

2)*a) Montrer que* $t_{\overrightarrow{IC}}\circ S_{(AI)}$ *est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.*

b) Soit $J=C*D$. *Vérifier que* $f=S_{(AC)}\circ S_{(AJ)}$. *En déduire alors que l'isométrie* $\varphi=S_{(IJ)}\circ S_{(AC)}\circ S_{(AJ)}$ *est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.*

3) *Les bissectrices interieures du triangle ABC se coupent en K. Soit* $r=S_{(AC)}\circ S_{(AK)}$.

a) Montrer que r est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

b) En utilisant une décomposition convenable de la rotation $r'=r_{\left(C,\frac{\pi}{4}\right)}$, *caractriser l'isométrie* $r'\circ r$.

c) Soit $A'=r'(A)$. *Montrer que les droites* (AB) *et* $(A'K)$ *sont paralléles.*

4) *Soit h une isométrie qui laisse le triangle ABC globalement invariant. Montrer* que h fixe A et I. En déduire toutes les isométries h.

Symétrie glissante

$f=t_{\vec{u}}\circ S_{\Delta}=S_{\Delta}\circ t_{\vec{u}}$ (forme réd[uite] de f

Il faut que $\vec{u}$ soit directeur de Δ.

$f\circ f=t_{2\vec{u}}$.

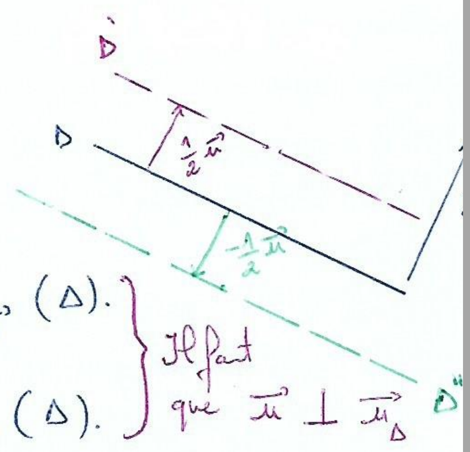
Si $f(M)=M'$ alors $I=M*M'$

Prof:M.Benali

* La composition :

Si $\Delta // \Delta'$: $S_{\Delta'}\circ S_{\Delta}=t_{2\overrightarrow{IJ}}$ avec $I\in\Delta$ et $J=p_{(\Delta')}^{\perp}(I)$

Si $\Delta\cap\Delta'=\{I\}$: $S_{\Delta'}\circ S_{\Delta}=R_{(I,2(\vec{u},\vec{u'}))}$



* La décomposition :

. $t_{\vec{u}}=S_{\Delta'}\circ S_{\Delta}$ avec $\Delta'=t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.

. $t_{\vec{u}}=S_{\Delta}\circ S_{\Delta''}$ avec $\Delta''=t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.

Il faut que $\vec{u}\perp\vec{u}_{\Delta}$

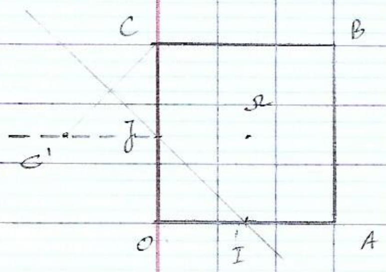
. $R_{(\Omega,\alpha)}=S_{\Delta'}\circ S_{\Delta}$ avec $\Delta'=R_{(\Omega,\frac{\alpha}{2})}$

. $R_{(\Omega,\alpha)}=S_{\Delta}\circ S_{\Delta''}$ avec $\Delta''=R_{(\Omega,\frac{-\alpha}{2})}$

Il faut que $\Omega\in\Delta$.

Série 10.

Ex 3]



1) a) $f = S_{(AC)} \circ S_{(\Omega J)}$

$= S_{(\Omega C)} \circ S_{(\Omega J)}$.

On a $(AC) \cap (\Omega J) = \Omega$.

donc $f = S_{(AC)} \circ S_{(\Omega J)}$

$= R_{(\Omega,\, 2(\overrightarrow{\Omega J}, \widehat{\overrightarrow{\Omega C}}))}$

$= R_{(\Omega,\, -\frac{\pi}{2})}$

f est la rotation de centre Ω et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$.

b) $t = S_{(AC)} \circ S_{(IJ)}$.

Dans le triangle OAC;

On a $\left.\begin{array}{l} I = \text{mil}[OA] \\ J = \text{mil}[OC] \end{array}\right\} (IJ) \parallel (AC)$

donc $t = S_{(AC)} \circ S_{(IJ)} = t_{\overrightarrow{2H\Omega}}$ On pose $H = I * J$.

$= t_{\overrightarrow{O\Omega}}$

c) $f = S_{(\Omega I)} \circ S_{(AC)}$?

On a $S_{(\Omega I)} \circ S_{(AC)}$

$= R_{(\Omega,\, 2(\overrightarrow{AC}, \widehat{\overrightarrow{\Omega I}}))}$

$= R_{(\Omega,\, 2 \cdot \frac{3\pi}{4})}$

$= R_{(\Omega$

d'où $f \circ t = S_{(\Omega I)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(I$

$= R_{(I,\, 2(\overrightarrow{IJ}, \widehat{\overrightarrow{I\Omega}}))}$

$= R_{(I,\, -\frac{\pi}{2})}$

donc $f \circ t$ est une rotation de cent et ~~de rayon~~ d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2) On a $g = f \circ S_{(OI)}$

$= S_{(AC)} \circ S_{(\Omega J)} \circ S_{(OI)}$

$= S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{OC}}$

$= S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ t_{\overrightarrow{\Omega C}}$

$= S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{\Omega C}}$

$= S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{\Omega C}}$

Comme $\overrightarrow{\Omega C}$ est un vecteur directeur de (IJ). Alors g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{\Omega C}$ et d'axe (IJ).

3) On a $g^{-1} \circ f = (f \circ S_{(OI)})^{-1} \circ f$

$= S_{(OI)} \circ f^{-1} \circ f$

$= S_{(OI)}$

Donc $g^{-1} \circ f$ est une symétrie orthogonale d'axe (OI). ~~est l'identité~~.

4) $g: M(z) \mapsto M'(z')$.
On a $g = f \circ S_{(OI)}$.
On pose $M_1 = S_{(OI)}(M)$; $M(z)$
donc $z_{M_1} = \bar{z}$.
On a $g(M) = M'$
$\Leftrightarrow f \circ S_{(OI)}(M) = M'$
ssi $f(M_1) = M'$ avec $f = R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}$.
d'où $\begin{cases} M'\Omega = \Omega M_1 \\ (\vec{\Omega M_1}, \vec{\Omega M'}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left(\frac{z' - z_\Omega}{\bar{z} - z_\Omega}\right) = -i$
ssi $z' = -i\bar{z} + i z_\Omega + z_\Omega = -i\bar{z} + (1+i) = -i\bar{z} + 2i$

On a $\Delta = \{M \in P / f(M) = g(M)\}$
$M \in \Delta$ ssi
$f(M) = g(M)$ ssi
$g^{-1} \circ f(M) = g^{-1} \circ g(M) = M$. ssi
$S_{(OI)}(M) = M$ ssi
$M \in (OI)$
d'où $\Delta = (OI)$.

b) Comme $A \in (OI) = \Delta$
alors $f(A) = g(A)$.
ssi $g(A) = f(A)$
$= R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}(A)$
$= O$.

c) Dans un RON $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$
$M \in P$; $M'(z') = g(M)$.
* Pour $M_1 = O$; $g(O) = C$
or $z_1 = 0$; $z' = -i.0 + 2i$
$= z_C$
$g(O) = K(O)$

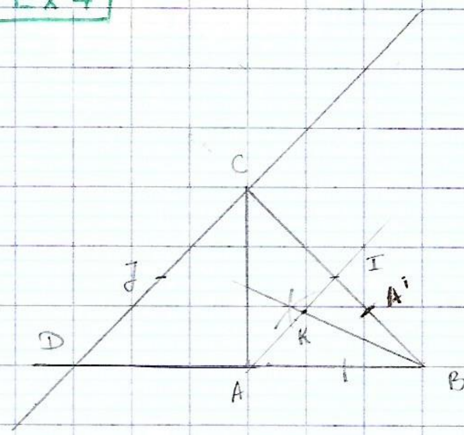
avec $K: P \longrightarrow P$
$M(z) \longmapsto M'(z')$ avec
$z' = -i\bar{z} + 2i$.

* Pour $M_2 = A$; $g(A) = O$
$z_2 = 2$;
$z'_2 = -i.2 + 2i = 0$
donc $K(A) = O$
$K(A) = g(A)$

* Pour $M_3 = \Omega$
$g(\Omega) = C'$
pour $z_3 = 1+i$;
$z'_3 = -i(1-i) + 2i$
$= -1 - i + ...$
$z'_3 = -1 ...$
$K(\Omega) = g(\Omega)$

Comme A, Ω et O ne sont pas alignés,
et $g(A) = K(A)$
$g(\Omega) = K(\Omega)$
$g(O) = K(O)$
alors $K = g$.
d'où pour $M' = g(M)$; $M \in P$;
$z' = -i\bar{z} + 2i$.

Ex 4



1) a) On a $f = S_{(AB)} \circ S_{(AI)}$
$= R_{(A, 2(\widehat{\vec{AI}, \vec{AB}}))}$
$= R_{(A, 2.(-\frac{\pi}{4}))}$
$= R_{(A, -\frac{\pi}{2})}$
donc f est la rotation de centre A et d'angle

b) On a $S_\Delta \circ S_{(CD)} = t_{\vec{CB}}$
alors $\Delta = t_{\frac{1}{2}\vec{CB}}((CD))$
$= (AI)$
d'où $t_{\vec{CB}} = S_{(AI)} \circ S_{(CD)}$

$f \circ t_{\vec{CB}} = S_{(AB)} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AI)} \circ S_{(CD)}$
$= S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$
$= R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}$ ...

2) a)

$t_{\vec{IC}} \circ S_{(AI)} = S_{\Delta'} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AI)}$
$= S_{\Delta'}$

or $\vec{IC} \perp (AI)$ avec $S_{\Delta'} \circ S_{(AI)} = t_{\vec{IC}}$

d'où $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{IC}}((AI))$.

~~Soit J = A∗C~~

b) On a $S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$

$= R_{(A, 2\underbrace{(\vec{AJ}, \vec{AC})}_{\text{AJCI losange}})}$

$= R_{(A, \frac{-\pi}{2})}$

$= f$.

On a $\varphi = S_{(IJ)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$
$= S_{(IJ)} \circ f$
$= S_{(IJ)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AI)}$
$= t_{\vec{AC}} \circ S_{(AI)}$
$= t_{\vec{AI}} \circ t_{\vec{IC}} \circ S_{(AI)}$

$= t_{\vec{AI}} \circ S_{\Delta'}$

Comme $\vec{AI}$ vecteur directeur de Δ',
~~alors~~ φ est une Symétrie glissante
d'axe Δ' et de vecteur $\vec{AI}$.

3) a) On a $r = S_{(AC)} \circ S_{(AK)}$
$= R_{(A, 2(\vec{AK}, \vec{AC}))}$
$= R_{(A, (\vec{AB}, \vec{AC}))}$
$= R_{(A, \frac{\pi}{2})}$

b) On a $r' = R_{(C, \frac{\pi}{4})}$
$= R_{(C, 2(\vec{CA}, \vec{CK}))}$
$= \ldots$

d'où $r' \circ r = S_{(CK)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AK)}$
$= S_{(CK)} \circ S_{(AK)}$
$= R_{(K, 2\underbrace{(\vec{KA}, \vec{KC})}_{\text{a demontier}})}$
$= R_{(K, +\frac{3\pi}{4})} = R_{(K, -\frac{5\pi}{4})}$ (correcte) ✓

$r' \circ r$ est une rotation de centre K et d'agle $\frac{3\pi}{4}$.

c) ~~...~~

On a $r(A) = A$

donc $r'(r(A)) = R_{(K, \frac{3\pi}{4})}(A)$

soit $A' = r'(A) = R_{(K, \frac{3\pi}{4})}(A)$

donc $(\vec{KA}, \vec{KA'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

On a $(\vec{AB}, \vec{KA'}) \equiv (\vec{AB}, \vec{KA}) + (\vec{KA}, \vec{KA'})$
$\equiv (\vec{AB}, \vec{AK}) + \pi + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$
$\equiv 0 [2\pi]$.

donc $\vec{AB}$ et $\vec{KA'}$ col $\to (AB) \parallel (KA')$

4) h laisse globalement invariant le triangle ABC.

ainsi $h(A) \in \{A, B, C\} = E$

~~tels h(B) ∈ { ... }~~

$h(B) \in E$; $h(C) \in E$.

Supposons que $h(A) \neq A$.

alors $h(A) = B$ ou $h(A) = C$

On a $AB = AC$

~~d'où h AB~~

$h(B) = A$ ou $h(C) = A$
et $h(C) = C$ et $h(B) = C$

$BA = CB$ ou $BC = CB$

de même que pour le 1er Cas.

... cela en B.

donc $h(A) = A$.

ainsi $h(B) \in \{B, C\}$

$h(C) \in \{C, B\}$

donc $\left.\begin{array}{l} h([BC]) = [BC] \\ \text{or } I = \text{mil } [BC] \end{array}\right\} h(I) = \text{mil } [BC]$

ainsi $I = \text{mil } [BC] = h(I)$.

Comme h fixe A et I, alors elle fixe (AI).

D'où h est la symétrie orthogonale d'axe (AI).

ou h est l'identité

4) $\left.\begin{array}{l} h(\langle ABC \rangle) = \langle ABC \rangle \\ \text{et ~~donc~~ ABC rectangle en A} \end{array}\right\}$

donc $h(\langle ABC \rangle)$ r. en $h(A)$.

donc $A = h(A)$.