Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°15 4éme Math	Prof:M.Benali

xercice – 1– :

ndiquer la bonne réponse :

1) *Le réel* $\frac{\sqrt[6]{216}}{\sqrt[4]{144}}$ *est égale à :* $a)\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad b)\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad c)\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}-(1+\sqrt[6]{x})^3\right]=$ $a)-\infty$ $\quad b)0$ $\quad c)+\infty$

3) *La dérivée de la fonction* $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{1-x}}$ *sur* $]-\infty,1[$ *est* $f'(x)=:$ $a)\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ $\quad b)\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{1-x}}$ $\quad c)\frac{-1}{\sqrt[3]{(1-x}}$

4) *L'inéquation* $1-\sqrt[3]{x^2}\prec 0$ *admet pour solution:* $a)\,]-1,1[$ $\quad b)\,]1,+\infty[$ $\quad c)\,]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

xercice – 2– :

oit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=(x-3).\sqrt[3]{x+1}$.

1)Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.Interpréter le résultat.

2)a)Dresser le tableau de variations de f .

b)Etudier la branche infinie de C_f *au voisinage de* $+\infty$ *puis tracer* C_f .

3)*Soit* g la restriction de f à $[0,+\infty[$

a)Montrer g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-3,+\infty[$.

b)Montrer que g^{-1} *est* dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.

c)Tracer la courbe de g^{-1} *dans le meme repére.*

xercice – 3– :

oit f la fonction définie sur $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right]$ par $f(x)=x+\sqrt[3]{1-3x}$.

)Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{1}{3}$.Interpréter le résultat.

)a)Dresser le tableau de variations de f .

b)Etudier la branche infinie de C_f *au voisinage de* $-\infty$ *puis tracer* C_f .

On verifiera que le point $A(-\frac{7}{3},-\frac{1}{3})$ *est un point de* C_f

)*Soit* g la restriction de f à $]-\infty,0]$

a)Montrer g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on etudiera les variations.

b)Etudier la dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(-\frac{1}{3})$.

c)Tracer la courbe de g^{-1} *dans le meme repére*

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$.

On désigne par (ξ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que pour tout réel x , on a : $f(1-x) = f(x)$.
2) Etudier la fonction f et tracer (ξ) .

Exercice 5 :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par : $f_n(x) = x^n.\sqrt{x\ (1-x)}$; f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = \sqrt{x\ (1-x)}$.

On désigne par (ξ_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan ; (unité graphique : 10cm).

1) Montrer que (ξ_0) est un demi-cercle ,de rayon $\frac{1}{2}$, dont on précisera le centre .
2) Soit n un entier naturel non nul .
   a) Calculer $f'_n(x)$ pour $x \in]0;1[$ et montrer que $f'_n(x)$ et $[(n+\frac{1}{2}) - (n+1).x]$ ont un même signe .
   b) Etudier la dérivabilité de f_n en zéro et en 1 .
   c) Dresser le tableau de variation de f_n .(on ne demande pas le calcul du maximum de f_n).
3) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in IN$.
   a) Etudier le signe de $[f_{n+1}(x) - f_n(x)]$. En déduire la position de (ξ_n) et (ξ_{n+1}) .
   b) Tracer (ξ_1) et (ξ_2) .

Prof : M.Ben Ali

Ex 2|

Soit $f : x \longmapsto (x-3)\cdot\sqrt[3]{x+1}$ pour $x \in [-1,+\infty[$.

1) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x-3)\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} (x-3)\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x+1)^3}}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} (x-3)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(x+1)^2}}$

$= -\infty$.

donc $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point $(-1,0)$.

2)a) pour $x \in]-1,+\infty[$, f est dérivable et :

$f'(x) = 1\cdot\sqrt[3]{x+1} + (x-3)\cdot\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$= \dfrac{x-3+3(x+1)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$= \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-3	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-3)\cdot\sqrt[3]{x+1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3\cdot\sqrt[3]{x+1}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^3}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$

$= 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-3)\sqrt[3]{x+1} - x$.

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x-3)\left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right) - 3$

$= +\infty$.

3)a) Soit g la restriction de f à $[0,+\infty[$.

g est continue et strictement croissante ...

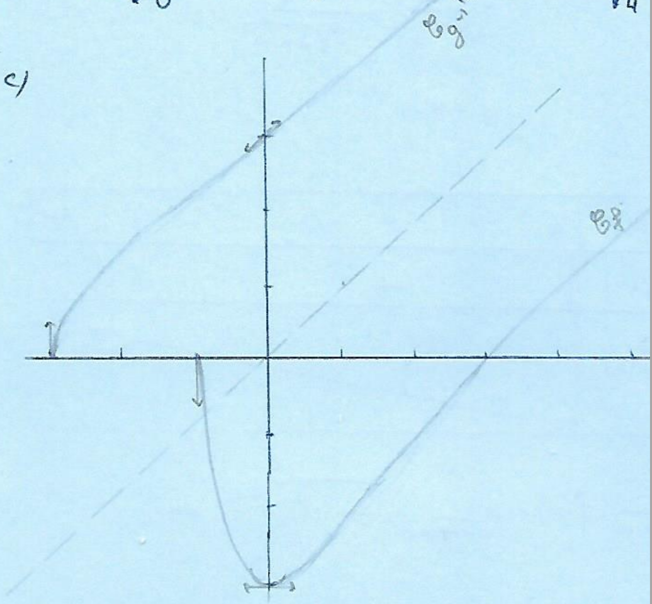
Donc elle réalise une bije...

b) On a : $g(3) = f(3) = 0$.

g est dérivable en 3 et $g'(3) = \sqrt[3]{4}$.

donc g^{-1} " " " $g^{-1}(3)=0$ et $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

c)



Ex 4|

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt[3]{(2x-1)^2}$

$\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un ROND$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) pour $x \in \mathbb{R}$, $1-x \in \mathbb{R}$.

$f(1-x) = \sqrt[3]{(2-2x-1)^2}$

$= \sqrt[3]{(-2x+1)^2}$

$= \sqrt[3]{(2x-1)^2} = f(x)$.

2) D'après 1), $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'a[xe]

$\Delta : x = \frac{1}{2}$.

Le domaine d'étude se réduit à $[\frac{1}{2},+\infty[$.

On a la fct : $x \longmapsto (2x-1)^2$ est dérivable et strictement positive sur $]\frac{1}{2},+\infty[$.

d'où $f : x \longmapsto \sqrt[3]{(2x-1)^2}$ est dérivable sur $]\frac{1}{2},+\infty[$

Pour $x \in]\frac{1}{2},+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\cdot 2\cdot(2x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{((2x-1)^2)^2}}$

$f'(x) = \dfrac{4(2x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{(2x-1)^3}\cdot\sqrt[3]{2x-1}}$

$f'(x) = \dfrac{4}{3\cdot\sqrt[3]{2x-1}} > 0$.

donc f est strictement croissante s...

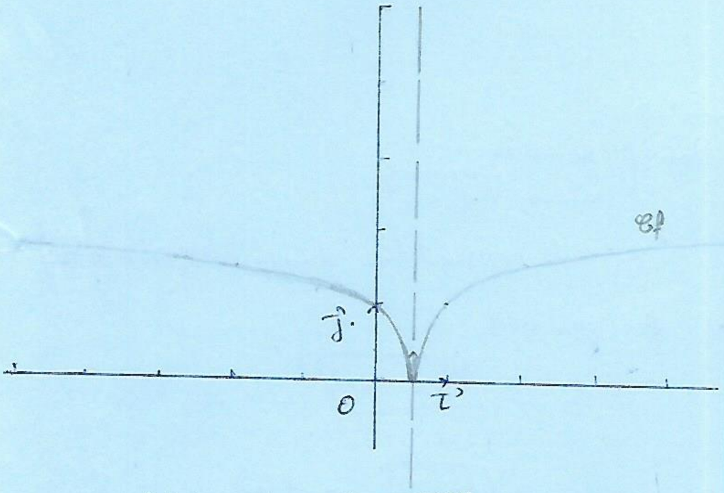
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{\frac{1}{2}(2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{2x-1}}$$

$$= +\infty.$$

x	$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{(2x-1)^2} = +\infty$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{x}$$

$$= \cancel{\lim_{x\to+\infty} 2\sqrt[3]{\frac{(2x-1)^2}{2x-1}}}$$

$$= \cancel{\lim_{x\to+\infty} 2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{4x^2-4x+1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= 0.$$

d'où $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$.

Ex 1

1) $\frac{\sqrt[6]{216}}{\sqrt[4]{144}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x} - (1+\sqrt[6]{x})^3\right]$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x} - \left(1+3\cdot(\sqrt[6]{x}) + 3(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3\right)\right]$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[\cancel{\sqrt{x}} - 1 - 3\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} - \cancel{\sqrt{x}}\right]$

$= -\infty.$

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{1-x}}$ pour $x \in]-\infty, 1[$

$f'(x) = \cancel{3}\cdot\frac{-1}{\cancel{3}\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

$= \frac{-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

4) $1 - \sqrt[3]{x^2} < 0$

ssi $0 < 1 < \sqrt[3]{x^2}$

ssi $1^3 = 1 < x^2$

ssi $|x| > 1$

$x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

Ex 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^n . \sqrt{x(1-x)}$.

$\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans RON $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $f_0(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Soit $M(x_0,y_0) \in \mathcal{C}_0$, $x_0 \in [0,1]$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

$M_0 \in \mathcal{C}_0$ ssi $y_0 = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow y_0 \geq 0$.

ssi $y_0^2 = -x^2 + x$.

ssi $x_0^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y_0^2 = 0$.

ssi $(x_0 - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$.

donc $\mathcal{C}_0$ est le demi-cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre $(\frac{1}{4}, 0)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) pour $x \in]0,1[$,

$$f_n'(x) = x^n \cdot \frac{-2x+1}{2\sqrt{x(1-x)}} + \sqrt{x(1-x)} \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$= \frac{x^n(-2x+1) + 2n \cdot x^{n-1} \cdot (x(1-x))}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{x^n\left[-2x+1+2n-2nx\right]}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{x^n\left[(\frac{1}{2}+n) - x(1+n)\right]}{\sqrt{x(1-x)}}$$

d'où $f_n'(x)$ et $\left[(\frac{1}{2}+n) - x(1+n)\right]$ ont le même signe.

Car $x \in]0,1[$ ou $x^n > 0$.

et $\sqrt{x(1-x)} > 0$.

b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^n \cdot \sqrt{x(1-x)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} \cdot \sqrt{x(1-x)}$$

$$= 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x^n \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} x^n \cdot \frac{\sqrt{x(1-x)}}{-\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left[x^n \cdot \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right]$$

$$= -\infty.$$

c) ssi $f_n'(x) > 0$,

ssi $n + \frac{1}{2} > (n+1)x$.

ssi $x < \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$

ssi $0 < x < \frac{2n+1}{2(n+1)} < 1$.

x	0		$\frac{2n+1}{2(n+1)}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

3) Soit $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^{n+1} - x^n)\left[\sqrt{x(1-x)}\right]$.

On a $0 \leq x \leq 1$.

d'où $x^{n+1} \leq x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{ssi } x^{n+1} - x^n \leq 0 \\ \text{or } \sqrt{x(1-x)} \geq 0\end{array}\right\} f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0.$$

d'où $\mathcal{C}_n$ au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$.

* $f_1(x) = x \cdot \sqrt{x(1-x)}$.

x	0		$3/4$		1
$f_1'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16} \simeq 0,325$	$\searrow$	0

* $f_2(x) = x^2 \cdot \sqrt{x(1-x)}$.

x	0		$\frac{5}{6}$		1
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{25\sqrt{5}}{216} \simeq 0,259$	$\searrow$	0